

Institut für Plasmaphysik
KERNFORSCHUNGSANLAGE JÜLICH
des Landes Nordrhein-Westfalen

Zur Theorie der magnetischen Kompression
zylindersymmetrischer Plasmen

von

H. Kever

Jül - 2 - PP

November 1960

Als Manuskript gedruckt



Berichte der Kernforschungsanlage Jülich – Nr. 2
Institut für Plasmaphysik Jül – 2 – PP

Dok.: PLASMA – MAGNETIC COMPRESSION * DK 533.21.01 : 621.039.6.01

Zu beziehen durch: ZENTRALBIBLIOTHEK der Kernforschungsanlage Jülich
Jülich, Bundesrepublik Deutschland

Institut für Plasmaphysik
KERNFORSCHUNGSANLAGE JÜLICH
des Landes Nordrhein-Westfalen

Zur Theorie der magnetischen Kompression
zylindersymmetrischer Plasmen

von

H. Kever

Jül - 2 - PP

November 1960

als Manuskript gedruckt

Inhalt

Zusammenfassung	1
Einleitung	3
1. Der Ablauf des Kompressionsvorganges nach dem free-particle Modell	
1.1 Das free-particle Modell	6
1.2 Die Gleichung für das äußere Magnetfeld	11
1.3 Die Berechnung der Bewegung im free-particle Modell	17
1.4 Ergänzungen zum free-particle Modell	28
2. Der Ablauf des Kompressionsvorganges nach dem Schneepflug-Modell bei eingeschlossenem innerem Magnetfeld	
2.1 Das Schneepflug-Modell	35
2.2 Die Gleichung für das innere und für das äußere Magnetfeld	42
2.3 Die numerische Integration der Bewegungsgleichung	47
2.4 Ergebnisse. Die Energie des Plasmas	55
3. Rechnungen mit einem adiabatischen Modell (Osovets-Modell) des Kompressionsvorganges bei eingeschlossenem inneren Magnetfeld	
3.1 Das Osovets-Modell der magnetischen Kompression	65
3.2 Lösungen der Bewegungsgleichung	74
Literaturverzeichnis	82

Zusammenfassung.

Der Vorgang der magnetischen Kompression eines zylindrischen Plasmas wird an drei verschiedenen Modellen untersucht, denen jeweils verschiedene Voraussetzungen über die Eigenschaften des Plasmas und seines Strömungsfeldes zugrunde liegen.

In der als free-particle Modell bezeichneten Näherung, in der Stöße der Plasmateilchen vernachlässigt werden, lassen sich die für den Vorgang kennzeichnenden Größen wie Plasmaradius, Kompressionszeit, Strom usw. in expliziter Form analytisch berechnen. Insbesondere läßt sich ein Ausdruck für die Energie des Plasmas angeben; die sich daraus ergebenden Folgerungen für die Dimensionierung werden erörtert. Als entscheidender Parameter erweist sich dabei das Verhältnis der Induktivität der Kompressionsspule zur Induktivität des äußeren Kreises.

Um den Einfluß des bei magnetischen Kompressionsexperimenten wesentlichen inneren Magnetfeldes auf den Ablauf des Kompressionsvorganges zu untersuchen, wurde von der als Schneepflug-Modell bezeichneten Näherung ausgegangen. Dazu wurde eine Ableitung der Bewegungsgleichung des Schneepflug-Modells aus den magneto-hydrodynamischen Grundgleichungen gegeben, die den Fall innerer Magnetfelder einschließt und welche die Voraussetzungen des Modells deutlich werden läßt. Die den Kompressionsvorgang beschreibende nicht-lineare Differentialgleichung wurde numerisch mit einem automatischen Digitalrechner integriert, nachdem eine anfangs bei der Lösung der Gleichung auftretende Schwierigkeit behoben war. Die Energie des Plasmas nach dem Schneepflug-Modell wird besonders untersucht; insbesondere deren Abhängigkeit von der Stärke des anfangs eingeschlossenen Magnetfeldes. Für nicht zu große Werte desselben ergeben sich die gleichen Abhängigkeiten von den übrigen Bedingungen des Experimentes wie im free-particle Modell. Die dort geltenden Dimensionierungsbetrachtungen treffen daher auch auf die magnetische Kompression nach dem Schneepflug-Modell zu.

Im dritten Modell werden gewisse bei der Anwendung des Schneepflug-Modells auf Zeiten nach dem ersten Kompressionsmaximum entstehende

Schwierigkeiten behoben. Die Kompression wird als adiabatisch angenommen, und die endliche Schwingungsdauer des äußeren Stromes berücksichtigt. Die Annahme eines schwingenden ringförmigen Plasmas mit innerem Magnetfeld im nichtleitenden Neutralgas und die Voraussetzung von Ähnlichkeitslösungen für das Strömungsfeld in einem vollständig leitenden homogenen Plasmazylinder führen zur selben Form der Bewegungsgleichung. Mit dieser wird der Vorgang des Einschwingens des Plasmazylinders in die quasi-stationäre Gleichgewichtslage berechnet, die durch das Druckgleichgewicht zwischen innerem und äußerem Magnetfeld gegeben ist. Die elektrische Kreisgleichung wird ohne Vernachlässigung als zweite Differentialgleichung neben der Bewegungsgleichung benutzt, wodurch sich insbesondere der Einfluß eines äußeren elektrischen Widerstandes auf den Lösungsverlauf erfassen läßt.

Einleitung.

Von den verschiedenen Methoden zur Erzeugung und Einschließung von Plasmen hoher Temperaturen mit dem Ziel, kontrollierte thermonukleare Reaktionen im Laborversuch zu verwirklichen, hat die magnetische Kompression erst in den letzten Jahren Bedeutung erlangt. Die ersten Berichte über magnetische Kompressions-Experimente wurden auf der Zweiten Genfer Atomkonferenz vorgelegt^{1, 2}. Seitdem sind eine Reihe weiterer Arbeiten auf diesem Gebiet bekannt geworden^{3, 4, 5, 6, 7}; einen Überblick über den Stand der Arbeiten bis zum Ende des Jahres 1958 enthält⁸, eine weitere Übersicht mit Berücksichtigung der Arbeiten bis Mitte 1959 ist in⁹ enthalten.

Das allen magnetischen Kompressions-Experimenten gemeinsame Prinzip der Versuchsanordnung besteht in folgendem. Eine niederinduktive Kondensatorbatterie hoher Kapazität wird über eine gerade Spule entladen. Innerhalb der Spule befindet sich das Entladungsrohr mit dem zu komprimierenden Gas. Während der Entladung der Kondensatorbatterie erzeugt der Spulenstrom ein zeitlich stark veränderliches, im Entladungsrohr vorwiegend axiales Magnetfeld, das ein azimuthales elektrisches Feld induziert und damit Ströme im Gas erzeugt, deren Stärke von der elektrischen Leitfähigkeit innerhalb des Gases abhängig ist. Wenn die elektrische Leitfähigkeit genügend groß ist, verhindern diese Ströme das Eindringen des Magnetfeldes in das Gas, das nach einiger Zeit, zunächst in Gebieten hoher Stromdichte, vollständig ionisiert ist und daher in den Plasmazustand übergeht. Die Ströme bleiben dann auf der Oberfläche des Plasmas begrenzt und damit auch die elektromagnetischen Kräfte, die das Magnetfeld auf das Plasma ausübt. Unter der Wirkung dieser Kräfte bewegt sich das Plasma nach innen und wird verdichtet. Infolge der Energieaufnahme des Plasmas während der Kompression und der durch die Kompression bedingten hohen Dichten werden Ionen-Temperaturen von einigen 10^7 °K erzielt, und es ergeben sich bei Verwendung von Deuterium als Füllgas bei Anfangsdrucken von einigen 10 bis 100 μ Hg Neutronenpulse von 10^5 - 10^7

Neutronen. Zwei Gruppen von Neutronen sind dabei zu unterscheiden, die offenbar als Folge verschiedener Anfangsbedingungen der Entladungen, wie Dichte, Ionisationsgrad, inneres Magnetfeld, entstehen^{10, 11, 12}

Neutronen der einen Gruppe treten auf im Zusammenhang mit harter Röntgenstrahlung von 100 - 200 keV Energie und gleichzeitigen starken Schwingungen des im Plasma eingeschlossenen Magnetfeldes. Diese Neutronen entstehen durch Verschmelzungsreaktionen von Deuteronen, die in kurzzeitig auftretenden hohen inneren elektrischen Feldern beschleunigt werden. In diesen Feldern beschleunigte Elektronen sind die Ursache der harten Röntgenstrahlung. Bei der zweiten Gruppe von Neutronen wird keine gleichzeitige Emission von Röntgenstrahlung beobachtet oder nur solche, die der Temperatur des Plasmas entspricht. Diese Neutronen treten im Maximum der Kompression auf, die Erzeugungsraten sind in Übereinstimmung mit der Annahme eines thermischen Plasmas der oben angegebenen Temperatur, woraus auf den thermonuklearen Ursprung dieser Neutronen zu schließen ist.

Bei aller prinzipiellen Einfachheit magnetischer Kompressions-Experimente stellen sich einer vollständigen Erfassung der Vorgänge erhebliche Schwierigkeiten entgegen. Sie liegen auf theoretischer Seite nicht allein in der mathematischen Komplikation des Problems stark instationärer Vorgänge in zylindrischen Plasmen, sondern haben zudem ihren Grund in der Lückenhaftigkeit der Vorstellungen über dissipative Vorgänge in Hochtemperaturplasmen geringer Dichte. Damit zusammenhängende Fragen sind bisher selbst für ebene stationäre Vorgänge in Hochtemperaturplasmen noch nicht geklärt. Der Grund dieser Schwierigkeit liegt in der geringen Wechselwirkung der Plasmateilchen bei hohen Temperaturen. Eben diese Kleinheit der Wechselwirkung begrenzt auch die Anwendbarkeit magneto-hydrodynamischer Gleichungen, denen bestimmte Annahmen über die Form des Drucktensors, über elektrische und Wärmeleitfähigkeit zugrunde liegen. Sie ermöglicht aber andererseits erhebliche Vereinfachungen in der Berechnung der Anfangsphase der Bewegung.

Das Ziel der im folgenden beschriebenen Rechnungen war, anhand dreier Modelle: des free-particle Modells, des Schneepflug-Modells und eines adiabaten Modells, durch welche die Berechnung der Bewegung auf die Lösung gewöhnlicher Differentialgleichungen reduziert werden kann, quantitative Aussagen über die Dynamik des Kompressionsvorganges hauptsächlich in der ersten Phase der Plasmaverdichtung und über die dabei erreichbaren Energien zu gewinnen. Im Mittelpunkt der Betrachtung wird dabei der Einfluß des im Plasma eingeschlossenen Magnetfeldes stehen. Die Beschreibung der Dynamik durch gewöhnliche Differentialgleichungen setzt bestimmte Annahmen über das Plasma und sein Strömungsfeld voraus, die durch die spezielle Art der Versuchsbedingungen nahegelegt sind. Die verschiedenen Modelle liefern unter gewissen Bedingungen im wesentlichen die gleichen Abhängigkeiten der für den Vorgang maßgeblichen Größen, mit Unterschieden lediglich in den Zahlenfaktoren. Diese schon früher bei der Dynamik des Pinch-Effektes von Rosenbluth¹³ bemerkte Tatsache läßt die Vermutung zu, daß sich dieselben Abhängigkeiten auch bei Betrachtung detaillierterer Modelle des Vorgangs ergeben.

Der mit dem Kompressionsvorgang verbundene Ablauf von Verschmelzungsreaktionen bleibt unberücksichtigt, da der Einfluß der Reaktionsprodukte auf die Dynamik des Vorganges wegen der Kleinheit der Reaktionsraten zu gering ist. Auch wurden seitliche Teilchenverluste vernachlässigt, deren Einfluß auf den Kompressionsvorgang sich nur in den späteren Phasen der Kompression auswirkt, und umso später, je kleiner das Verhältnis von Plasmaradius zur Spulenlänge ist. Die Anordnung, die im folgenden betrachtet wird, ist eine zylindrische Spule mit Länge l , die als groß im Vergleich zum Innenradius a_0 des Entladungsrohres anzunehmen ist. Im Innern des Rohres liegt mit gemeinsamer Achse der Plasmazylinder mit Radius a , der ebenso wie die Stärke des zwischen Spule und Plasma gelegenen Magnetfeldes B eine Funktion der Zeit ist, zu deren Bestimmung im folgenden Abschnitt das free-particle Modell herangezogen werden soll, wobei zunächst das Plasma als magnetfeldfrei betrachtet wird.

1. Der Ablauf des Kompressionsvorganges nach dem free-particle Modell.

1.1 Das free-particle Modell.

Die Voraussetzungen des Modells.

Damit das free-particle Modell sinnvoll anwendbar ist, müssen zwei Voraussetzungen erfüllt sein. Die erste Voraussetzung betrifft die elektrische Leitfähigkeit des zu komprimierenden Plasmas. Diese soll so groß sein, daß während der Dauer des Kompressionsvorganges kein Magnetfeld in das Plasma eindringt. Dazu genügt schon, daß die äußere Randschicht des Plasmas genügend hochleitend ist. Dies kann durch eine dem eigentlichen Kompressionsexperiment vorausgehende stromstarke Hochfrequenzentladung erreicht werden. Da die elektrische Feldstärke am Rande des Entladungsrohres am größten ist, wird dort die Zündung der Entladung auch ohne vorherige Heizung zuerst einsetzen und das Gas in dieser Zone am ehesten, in späteren Phasen am besten leitend sein. Der Einsatz der Zündung am Rande wird auch experimentell beobachtet. Für den Nachweis, daß kein Magnetfeld in das Plasma eindringt, wird gelegentlich die Spitzer'sche Leitfähigkeitsformel¹⁴ für ein vollionisiertes Plasma herangezogen, mit dieser in bekannter Weise eine Diffusionszeit für das Magnetfeld berechnet und gezeigt, daß diese Zeit in praktischen Fällen wesentlich größer als die Dauer des Kompressionsvorganges ist. Wir versuchen hier nicht, die Spitzer'sche Leitfähigkeitsformel auf einen stark instationären Vorgang in einem Plasma anzuwenden, das sich sicher nicht in der Nähe eines thermischen Gleichgewichts befindet, zumal selbst unter stationären Verhältnissen Zweifel an der Anwendbarkeit der Spitzer'schen Formel bestehen¹⁵. Vielmehr wird hier nur die experimentelle Erfahrung zu Hilfe genommen, daß unmittelbar nach dem elektrischen Durchbruch des Gases trotz starken Anstiegs des Spulenmagnetfeldes im Innern des Plasmas kein oder nur geringer Magnetfeldanstieg beobachtet wird.

Die zweite Voraussetzung betrifft die Geschwindigkeit des Kompressionsvorganges. Die Geschwindigkeit der durch die Kompression bewirkten Teilchenbewegung soll so groß sein, daß die Wechselwirkung der bewegten geladenen Teilchen des Plasmas mit den noch nicht vom Kompressionsvorgang erfaßten ruhenden Teilchen vernachlässigt werden kann. Diese

Forderung ist erfüllt, wenn die freien Weglängen der bewegten Teilchen groß sind im Vergleich zum Radius des Plasmazylinders. Für den Wirkungsquerschnitt von Deuteronen für elastische Streuung gilt angenähert¹⁶

$$\sigma_{DD} \approx \frac{6 \cdot 10^{-19}}{E^2} \text{ cm}^2$$

mit der Teilchenenergie E in keV. Daraus folgt für die mittlere freie Weglänge von Deuteronen

$$l_{DD} \approx 2 \cdot 10^{18} n^{-1} E^2 \text{ cm},$$

woraus sich bei 1 keV Deuteronen-Energie und einer Dichte von $n = 10^{16} \text{ cm}^{-3}$ eine freie Weglänge von rd. 200 cm, bei einer Energie von 0,1 keV immer noch eine freie Weglänge von 2 cm ergibt. Die radialen Abmessungen üblicher Entladungsrohre bei magnetischen Kompressionsexperimenten betragen demgegenüber einige cm. Ferner wird die Geschwindigkeit der gerichteten Bewegung der Teilchen groß im Vergleich zur thermischen Geschwindigkeit und damit zur Schallgeschwindigkeit, der Kompressionsvorgang als nicht-adiabat angenommen werden. Das Plasma soll also im Vergleich zur Energie der gerichteten Bewegung kalt, aber andererseits hinreichend durchionisiert sein, daß die Gesetze für die Wechselwirkung geladener Teilchen in vollionisierten Plasmen angewendet werden können.

Mit diesen Voraussetzungen ergibt sich das folgende Bild des Kompressionsvorganges. Die Lorentzkräfte greifen nur am äußeren Rand des Plasmas an, das Innere des Plasmas bleibt magnetfeldfrei, wenn anfangs kein Magnetfeld vorhanden war. Die Kompression des Plasmas erfolgt dann so, als ob sich ein zylindrisches Rohr verengen würde, wobei die in dem Rohr befindlichen Gasteilchen durch elastischen Stoß mit der Wand des Rohres nach innen reflektiert werden, und zwar nach der zweiten Voraussetzung ohne Wechselwirkung mit den noch ruhenden Teilchen des Plasmas.

Der Reflexionsvorgang.

Der Vorgang der Reflexion der Plasmateilchen am Magnetfeld ist für den ebenen Fall bei stationärer Bewegung von Rosenbluth-Garwin¹⁷ analysiert worden. Das Ergebnis ist folgendes: In einer relativ kleinen Plasmaschicht im Übergangsgebiet vom Plasma zum Magnetfeld tritt Ladungstrennung der Elektronen und Ionen auf. Diese Grenzschicht ist infolge der Ladungstrennung ein Gebiet starker elektrostatischer Felder mit Feldstärkenrichtung normal zur Grenzschicht. Innerhalb dieser Grenzschicht, die von Morozov¹⁸ auch als E-Schicht bezeichnet wird, steigt das Magnetfeld exponentiell infolge der tangential in der Grenzschicht fließenden Ströme auf seinen Wert außerhalb des Plasmas an.

Die Struktur dieser Grenzschicht läßt sich unmittelbar verstehen, wenn man den Einschaltvorgang eines Magnetfeldes außerhalb eines durch eine Ebene begrenzten Plasmas betrachtet. Die anfangs ruhend gedachten Elektronen werden wegen ihrer geringeren Masse durch das tangential zur Grenzfläche induzierte elektrische Feld stärker beschleunigt als die Ionen, bewegen sich aber infolge des Vorhandenseins des Magnetfeldes nicht nur tangential, sondern auch senkrecht zur Grenzschicht, wodurch eine Trennung der Elektronen von den Ionen normal zur Grenzschicht erfolgt. Die durch die Ladungstrennung verursachten elektrostatischen Felder wirken der Ladungstrennung entgegen und begrenzen daher den durch das Magnetfeld bewirkten Trenneffekt, wodurch sich schließlich im stationären Fall eine Grenzschicht mit gleichbleibender Dicke ausbildet, deren Größe und genauere Struktur aus der Rechnung folgt. Die in der Grenzschicht fließenden Ströme führen, da durch Induktion erzeugt, zu einer Kompensation des äußeren Magnetfeldes im Innern des Plasmas, so daß vor der Grenzschicht das innere Magnetfeld Null ist.

Die Bewegungsgleichung im free-particle Modell.

Als ein wesentliches Ergebnis der Rosenbluthschen Rechnung¹⁷ folgt eine Druckbilanz, die an der Grenzschicht erfüllt ist, in der Form

$$(1.1) \quad \frac{B^2}{2\mu_0} = 2(m_e + m_i)n_0\left(\frac{da}{dt}\right)^2.$$

Gleichung (1.1) läßt sich unmittelbar interpretieren: Da $da/dt = a(t)$ die Geschwindigkeit, mit der sich die Grenzschrift gegen das Plasma verschiebt, so werden je Zeit- und Flächeneinheit $n_0 \cdot a$ Elektronen und Ionen an der Grenzschrift reflektiert, wenn man die Anfangsgeschwindigkeit der Teilchen gegenüber der Geschwindigkeit des "magnetischen Kolbens" vernachlässigt, und der auf die Teilchen übertragene Impuls beträgt $2m_e \cdot a$ für die Elektronen und $2m_i \cdot a$ für die Ionen, da die Teilchen mit der doppelten momentanen Grenzschrift-Geschwindigkeit die Grenzschrift verlassen und in das Plasma hinein reflektiert werden. Der dadurch gegebene kinetische Druck des Plasmas muß kompensiert werden durch den magnetischen Druck der Ströme innerhalb der Grenzschrift.

Da innerhalb der Grenzschrift keine Stöße von Teilchen auftreten und auch die von der Grenzschrift reflektierten Teilchen sich ohne Stöße frei durch das Plasma bewegen sollen, wird das der Gleichung (1.1) zugrundeliegende Modell als free-particle Modell bezeichnet. Zu Beginn der Kompressionsbewegung ist natürlich die thermische Geschwindigkeit der Teilchen gegenüber der Geschwindigkeit ihrer gerichteten Bewegung nicht vernachlässigbar: man muß setzen

$$(1.2) \quad \frac{B^2}{2\mu_0} = p + 2(m_e + m_i)n_0 a^2,$$

worin p den Druck der thermischen Bewegung des Plasmas bezeichnet. Da aber in einem sinnvollen magnetischen Kompressionsexperiment sehr bald nach dem Einschalten des Magnetfeldes der magnetische Druck wesentlich größer ist als der anfängliche thermische Druck des Plasmas, wird man keinen großen Fehler erwarten, wenn schon gleich für den Anfang der Bewegung der thermische Druck in der Bewegungsgleichung vernachlässigt wird.

Noch eine andere Schwierigkeit, auf die in der Literatur zuerst in ¹⁹ hingewiesen wurde, ergibt sich bei der Anwendung der Gleichung (1.1) auf

eine Bewegung des Plasmas aus der Ruhe, d.i. bei einer Anfangsgeschwindigkeit der Grenzschicht $\dot{a}(0) = 0$. Die Anfangsgeschwindigkeit der reflektierten Teilchen ist dann ebenfalls zunächst klein, und da sich die Grenzschicht infolge der Zunahme des äußeren Magnetfeldes mit zunehmender Geschwindigkeit hinter bereits reflektierten Teilchen her bewegt, werden Teilchen, die sich zu einem früheren Zeitpunkt von der Grenzschicht abgelöst hatten, wieder eingeholt und erneut beschleunigt. Das hat zur Folge, daß ein Teil der Masse, die anfangs in dem von der Grenzfläche überstrichenen Volumen enthalten war, zu späteren Zeitpunkten wieder als träge Masse am Kolben auftritt. Im Extremfall * wird man die jeweils am Kolben anliegende Masse gleich der verdrängten Masse annehmen, und gelangt damit zu dem gleichfalls von Rosenbluth-Garwin¹⁷ vorgeschlagenen und von diesen für die Berechnung der dynamischen Eigenschaften des instationären Pinch-Effektes benutzten Schneepflug-Modell (snow plow). Dieses Modell, das von Kolb¹ bereits zur Berechnung des Kompressionsablaufes in einem magnetfeldfreien Plasma benutzt wurde, hat gegenüber dem free-particle Modell den Nachteil, daß sich Lösungen, die für die ganze Dauer des Kompressionsvorganges gelten, nur durch numerische Rechnungen auffinden lassen, wogegen sich die Bewegung im free-particle Modell unter bestimmten Bedingungen in einfacher Weise exakt berechnen läßt. Weil das Modell als solches bereits lediglich eine Näherung darstellt, bedeuten exakte Lösungen zwar sachlich keinen Gewinn, sie erleichtern aber die Untersuchung des Einflusses von Parametern auf die Bewegung. Es lassen sich damit auf einfache Weise bereits Aussagen gewinnen, die auch für den Fall eines Plasmas mit innerem Magnetfeld Gültigkeit besitzen oder sich doch mit entsprechenden Abänderungen übertragen lassen. Für die Integration von Gl.(1.1) ist zunächst die Gleichung für das äußere Magnetfeld aufzustellen, die sich durch Anwendung des Kirchhoffschen Gesetzes auf den aus Kondensator-Batterie und Kompressionsspule gebildeten Kreis ergibt.

*Daß es sich tatsächlich bei den Modellen um Grenzfälle mit kontinuierlichem Übergang zwischen beiden handelt, geht aus einer kürzlich bekannt gewordenen Arbeit²⁰ zur Theorie des sogenannten rail-gun Plasma-Beschleunigers hervor.

1.2 Die Gleichung für das äußere Magnetfeld.

Die Stärke des äußeren Magnetfeldes ist über

$$(1.3) \quad B = \mu_0 \frac{I}{l}$$

mit dem Spulen- und Entladestrom I verbunden. In (1.3) ist bereits vorausgesetzt, daß die Spule lang, d.i. der Radius klein im Vergleich zur Länge l der Spule ist, und daher das Feld im Spuleninnern außerhalb des Plasmas nahezu homogen ist. Die Proportionalität von Magnetfeld und Stromstärke gilt jedoch unabhängig von der obigen Voraussetzung über die Geometrie der Spule. Wollte man die endliche Länge der Spule berücksichtigen, so käme die mit der z -Abhängigkeit aller Größen, vor allem der dynamischen, verbundene Komplikation des Problems ins Spiel. Es würde dann B_z sowohl eine Funktion der Koordinate z auf der Achse wie auch des Radius sein. Bei Vernachlässigung der endlichen Länge der Spule wird aber so der Proportionalitätsfaktor zwischen Magnetfeld und Spulenstrom eine insbesondere vom Radius unabhängige Konstante, wodurch die Gleichung für den Strom sofort als Gleichung für das Magnetfeld geschrieben werden kann. Das Magnetfeld ist dann durch die elektrische Kreisgleichung für den äußeren Entladekreis gegeben.

Die elektrische Kreisgleichung, Einführung des Parameters λ .

Sei ϕ_S der magnetische Fluß durch den Spulenquerschnitt, L_B die Induktivität der Kondensatorbatterie samt ihren Zuleitungen zur Spule, R der elektrische Widerstand des Kreises und U_0 die Ladespannung der Batterie, so ist die Gleichung für die Stromstärke I

$$(1.4) \quad \frac{d}{dt} \phi_S + L_B \frac{dI}{dt} + RI = U_c \quad ,$$

worin U_C die Spannung an der Kapazität C der Kondensatorbatterie zum Zeitpunkt t bedeutet:

$$U_C = U_0 - \frac{1}{C} \int_0^t I dt$$

Der Zeitnullpunkt soll mit dem Beginn der Entladung der Batterie, d.i. mit der Zündung des Schalters, zusammenfallen.

Die Induktivität Φ_S/I der Kompressionsspule setzt sich aus zwei Anteilen zusammen. Der erste Beitrag kommt von dem Fluß durch die Querschnittsfläche des Entladungsrohres, oder allgemeiner, wenn die Spule nicht dicht auf dem Entladungsrohr gezogen ist, von dem Fluß zwischen Innenradius der Spule und Innenradius des Entladungsrohres. Wenn die Differenz δ dieser beiden Radien klein gegenüber dem Innenradius des Entladungsrohres ist, wird die diesem Fluß entsprechende Induktivität einfach

$$L_0 = \mu_0 \frac{2\pi a_0 \delta}{\ell}$$

Der zweite Anteil rührt von dem Fluß durch die Fläche zwischen Innenradius des Entladungsrohres und dem äußeren Radius a des Plasmazylinders; wegen der Zeitabhängigkeit von a ist dieser Anteil zeitlich veränderlich. Das Innere des Plasmas liefert keinen Beitrag zum Fluß, da es wegen der vorausgesetzten hohen Leitfähigkeit des Plasmas zumindest für die Dauer der nachfolgend betrachteten Kompressionsvorgänge magnetfeldfrei bleibt. Mit

$$L_S = \mu_0 \frac{\pi a_0^2}{\ell}$$

für die Induktivität des Spuleninnern ohne Plasma wird der magnetische Fluß

$$(1.5) \quad \Phi_S = I L_0 + I L_S \left[1 - \left(\frac{a}{a_0} \right)^2 \right]$$

Die Kreisgleichung wird daher

$$\frac{d}{dt}(LI) + RI = U_c$$

mit L als der gesamten Induktivität des Batteriekreises

$$(1.6) \quad L = L_B + L_o + L_s \left[1 - \left(\frac{a}{a_o} \right)^2 \right]$$

Die Summe der beiden ersten Induktivitäten bezeichnen wir mit L_a und nennen sie die äußere Induktivität zum Unterschied von der zeitlich veränderlichen inneren Induktivität der Spule, welche anfangs Null ist, vorausgesetzt, daß das Plasma zu Beginn der Kompression an der Wand anliegt. Die der Anfangsinduktivität $L(0) = L_a$ zugeordnete Frequenz des Kreises wird im folgenden mit ω_o bezeichnet. Führt man noch an Stelle des Radius des Plasmazylinders den auf a_o bezogenen Wert als dimensionslosen Radius $y(t)$ ein und für den Quotienten der Induktivitäten L_s und L_a den Parameter λ

$$(1.7) \quad y(t) = \frac{a(t)}{a_o}, \quad \lambda = \frac{L_s}{L_a}$$

so wird die Gleichung (1.4) schließlich

$$(1.8) \quad \frac{d}{dt} \left\{ [1 + \lambda(1 - y^2)] I \right\} + \frac{R}{L_a} I = \frac{U_o}{L_a} - \omega_o^2 \int_0^t I dt$$

Das Auftreten von $y(t)$ in der Stromgleichung bedeutet die Kopplung mit der Bewegung, so daß Gleichung (1.8) im allgemeinen nur im Zusammenhang mit der Bewegungsgleichung lösbar ist.

Die Vernachlässigung des elektrischen Widerstandes R .

Falls jedoch $U_C \approx U_0 = \text{const}$, läßt sich die Lösung der Stromgleichung sofort angeben. Mit $LI = \phi$ wird

$$(1.9) \quad \phi = U_0 \int_0^t \exp\left(\int_t^{t'} \frac{R}{L} dt\right) dt' + C \exp\left(-\int_0^t \frac{R}{L} dt\right)$$

mit einer Integrationskonstanten C , die jedoch bei der Anfangsbedingung $I = 0$ für $t = 0$ gleich Null ist, so daß die hier interessierende Lösung durch das partikuläre Integral der inhomogenen Gleichung (1.8) gegeben ist. Für kleine t kann man entwickeln

$$\int_0^t \exp\left(\int_0^{t'} \frac{R}{L} dt\right) dt' \approx t + \frac{R}{L_a} \int_0^t dt' \int_0^{t'} \frac{dt}{1 + \lambda(1 - \gamma^2)},$$

worin der elektrische Widerstand des Kreises als konstant betrachtet ist, was wegen der Veränderlichkeit des Widerstandes der Batterieschalter in Wirklichkeit nicht erfüllt zu sein braucht. Die zeitliche Veränderlichkeit hat aber auf die Rechnung keinen Einfluß, wir denken uns den größten Wert von R eingesetzt. Da der Nenner des Integranden rechts > 1 , hat man

$$\frac{R}{L_a} \int_0^t dt' \int_0^{t'} \frac{dt}{1 + \lambda(1 - \gamma^2)} < \frac{R}{2L_a} t^2$$

und schließlich

$$(1.9a) \quad \phi \approx U_0 t \left[1 - \frac{R}{2L_a} t + O\left(\frac{R}{L_a} t^2\right) \right]$$

Im allgemeinen ist die Dämpfungszeitkonstante $2L_g/R$ größer als die Schwingungsdauer des Kreises, jedoch braucht für große λ nicht das gleiche für $2L_a/R$ zu gelten. Für große λ ist indessen auch die Abschätzung des Integrals ungünstig, statt L_a hat man einen Mittelwert zu wählen, der nahe bei $L_a(1 + \lambda)$ liegt, welcher Wert dann auch in (1.9) vorscheint. Dann ist aber der Ausdruck $Rt/2L_a$ in (1.9) klein gegenüber dem ersten Glied in der Klammer für Vorgänge, deren Dauer klein ist im Vergleich zur Schwingungsdauer des Kreises. Im folgenden wird daher der elektrische Widerstand gleich Null gesetzt werden.

Näherungsausdrücke für das Magnetfeld.

Auch im Fall $R = 0$, aber jetzt mit U_C zeitlich veränderlich, läßt sich die Stromgleichung formal sofort integrieren und gibt

$$(1.10) \quad I = \frac{1}{1 + \lambda(1 - \gamma^2)} \left\{ \frac{U_0}{L_a} t - \omega_0^2 \int_0^t \int_0^{t'} I dt dt' \right\}$$

Setzt man rechts wieder für I ein, so erhält man eine Reihendarstellung von I nach Potenzen von ω_0^2 . Bei Einführung einer zunächst noch willkürlichen Zeitkonstanten t_c und einer dimensionslosen Zeitvariablen τ vermöge $t = \tau t_c$ mit einer Stromeinheit \hat{I} und einer dieser Stromstärken entsprechenden Magnetfeldstärke \hat{B}

$$(1.11) \quad \hat{I} = \frac{U_0}{L_a} t_c, \quad \hat{B} = \frac{\mu_0 U_0}{l L_a} t_c$$

ferner mit dem Parameter $\alpha = (\omega_0 t_c)^2$ kommt nach Multiplikation der Gleichung (1.10) mit dem Proportionalitätsfaktor aus Gleichung (1.3)

$$(1.12) \quad \hat{B} = \frac{\hat{B}}{1 + \lambda(1 - \gamma^2)} \left\{ \tau - \alpha \int_0^\tau d\tau' \int_0^{\tau'} \frac{\tau d\tau}{1 + \lambda(1 - \gamma^2)} + \alpha^2 \int_0^\tau d\tau' \int_0^{\tau'} \frac{d\tau}{1 + \lambda(1 - \gamma^2)} \int_0^\tau \frac{\tau d\tau}{1 + \lambda(1 - \gamma^2)} + \dots \right\}$$

Auf diese Weise gewinnt man einen expliziten Ausdruck für die magnetische Feldstärke, der durch Einsetzen in die Bewegungsgleichung auf eine Integro-Differentialgleichung für $y(t)$ führt, die zur Auffindung von Näherungslösungen in beliebiger Ordnung in α benutzt werden kann. Aus der Darstellung (1.12) ist ersichtlich, daß die Reihe für $\alpha < 1$ konvergiert, da der Wert der Integrale kleiner als $\tau^n/n!$ ist, wodurch oberhalb $\tau > n$ das Konvergenzkriterium für alternierende Reihen erfüllt ist. Die Konvergenz besteht jedoch auch für $\alpha > 1$. Gute Konvergenz der Reihe ist natürlich für $\alpha \ll 1$, $\tau \lesssim 1$ zu erwarten. Bricht man die Entwicklung (1.12) bei kleinen α mit dem ersten Glied ab, so kommt

$$(1.13) \quad \mathcal{B} = \hat{\mathcal{B}} \frac{\tau}{1 + \lambda(1 - \gamma^2)}$$

Diese Lösung ergibt sich unmittelbar aus der Stromgleichung mit $R = 0$, wenn in (1.8) gesetzt wird $U_C = U_0$. Lösungen mit α oder ω_0 gleich Null bedeuten daher Konstanz der Spannung am Kondensator. Diese Annahme ist solange zulässig, als die Abnahme der Spannung an der Kapazität während der betrachteten Zeit t klein ist gegenüber der Anfangsspannung der Kondensatorbatterie, wenn also gilt

$$\frac{1}{C} \int_0^t I dt \ll U_0$$

Wenn diese Voraussetzung nicht mehr erfüllt ist, hat man in nächster Näherung in (1.12) das Glied proportional zu α zu berücksichtigen. Es wird dann über die Bewegungsgleichung (1.1) auch y eine Funktion von α . In gleicher Näherung wie für B ist daher zu setzen $y = y^{(0)} + \alpha y^{(1)}$ und man erhält durch Entwicklung und Vergleich der Koeffizienten von α je eine Differentialgleichung für $y^{(0)}$ und $y^{(1)}$. Das hier angedeutete, durch Gleichung (1.12) nahegelegte Verfahren bietet grundsätzlich die Möglichkeit, die Bewegung in beliebiger Näherung in α aus einem Satz

ungekoppelter Differentialgleichungen zu berechnen. Da jedoch die Zeit t_c in der Definition durch Gleichung (1.15) in einem sinnvoll angelegten Kompressionsexperiment kleiner als die Viertelperiode der Batterie-Schwingung und daher $\alpha \ll 1$ ist, wird im folgenden die Bewegung nur in der durch $y^{(0)}$ gegebenen Näherung untersucht, also $\alpha = 0$ gesetzt, aber wieder y statt $y^{(0)}$ für die Größe des Plasmaradius in dieser Näherung geschrieben.

1.3 Die Berechnung der Bewegung im free-particle Modell.

Die Bewegungsgleichung in dimensionsloser Schreibweise, Einführung der Kompressionszeit t_c .

Einsetzen von (1.13) in die Bewegungsgleichung (1.1) für das free-particle Modell liefert als Gleichung für den Radius $a(t)$

$$(1.14) \quad \frac{\hat{B}^2}{2\mu_0} \frac{\tau^2}{[1 + \lambda(1 - \gamma^2)]^2} = 2\rho_0 \dot{a}^2$$

Darin bezeichnet ρ_0 die Dichte des Plasmas vor der Kompression

$$\rho_0 = (m_e + m_i) n_0$$

Werden in Gleichung (1.14) auch rechts mit $a = ya_0$, $t = \tau t_c$ die dimensionslosen Variablen y , τ eingeführt, so schreibt sich die Differentialgleichung (1.14) besonders einfach, wenn die bisher noch unbestimmt gebliebene Zeitkonstante t_c , die zunächst nur aus Dimensionsgründen eingeführt war, definiert wird durch

$$(1.15) \quad t_c = \left(\frac{2a_0 \ell L_a}{U_0} \sqrt{\frac{\rho_0}{\mu_0}} \right)^{1/2}$$

Die durch Gleichung (1.15) bestimmte Zeitkonstante wird im folgenden als Kompressionszeit bezeichnet werden, obwohl sie nur mittelbar bis auf eine noch zu bestimmende Funktion von λ ein Maß für die tatsächliche oder absolute Kompressionszeit darstellt. Sie ist die für den Ablauf der Bewegung charakteristische Zeitkonstante, ebenso wie die entsprechende Größe beim Pinch-Effekt¹³. Numerisch ergibt sich mit p_0 = Anfangsdruck des Gases in Torr, a_0 und l in cm, L_a in nH und U_0 in kV, A = Massenzahl des zu komprimierenden Gases

$$(1.15a) \quad t_c \approx 0,04 \left(\frac{a_0 l l_a}{U_0} \sqrt{A p_0} \right)^{1/2} \mu\text{sec}$$

Nach der Definition von t_c durch Gleichung (1.15) wird die Differentialgleichung der Bewegung für den in Frage kommenden Zweig der Lösungskurven, Strich bedeutet Ableitung nach der Zeitvariablen,

$$(1.16) \quad y' = - \frac{\tau}{1 + \lambda(1 - y^2)}$$

Wie man sieht, ist das Verhältnis λ der inneren zur äußeren Induktivität der einzige Parameter, von dem die Lösungskurven $y(\tau)$ abhängig sind, alle anderen Abhängigkeiten sind durch die Wahl von a_0 und t_c als Einheiten eliminiert. Im allgemeinen Fall mit $\alpha \neq 0$ würde noch α als Parameter hinzukommen, von dem die Lösungen zusätzlich abhängig sein würden. Gleichung (1.16) enthält bereits das Ähnlichkeitsgesetz der Bewegung im free-particle Modell: Kompressionsversuche bei gleichem a_0 , t_c und Induktivitätsverhältnis L_S/L_a verlaufen gleich, bei gleichem λ ähnlich.

Die Lösungen für Radius und Magnetfeld.

Die Anfangsbedingungen der Lösung von (1.16) sind $y = 1$ für $\tau = 0$; daß die Anfangsgeschwindigkeit Null ist, ist bereits in (1.16) enthalten.

Die Integration der Gleichung (1.16) ist ersichtlich sofort durch Quadratur möglich und liefert y als implizite Funktion von τ

$$(1.17) \quad (1 + \lambda) y - \frac{\lambda}{3} y^3 = 1 + \frac{2}{3} \lambda - \frac{1}{2} \tau^2$$

Explizit läßt sich $y(\tau)$ dagegen leicht nur mit gewissen Vernachlässigungen berechnen. So erhält man für den Anfang der Bewegung aus (1.17) mit Vernachlässigung der dritten Ordnung in der Abweichung $1 - y$ von der Anfangslage

$$(1.17a) \quad y = 1 - \frac{1}{2\lambda} \left(\sqrt{1 + 2\lambda \tau^2} - 1 \right),$$

während man andererseits für kleine y erhält

$$(1.17b) \quad y = \frac{3 + 2\lambda}{3(1 + \lambda)} - \frac{\tau^2}{2(1 + \lambda)}$$

Die strenge Lösung von (1.16) für y aus (1.17) ist nicht erforderlich; es genügt die Kenntnis der Umkehrfunktion $\tau(y)$, die unmittelbar durch die Gleichung (1.17) gegeben ist. Mit der Kenntnis von $y(\tau)$ oder der Umkehrfunktion können nun auch die übrigen Größen als Funktion von τ oder y geschrieben werden. Für das mit \hat{B} normierte Magnetfeld $b = B/\hat{B}$ folgt

$$b(\tau) = \frac{\tau}{1 + \lambda [1 - y^2(\tau)]}$$

Es ist daher b gleich dem Betrag der Geschwindigkeit y' . Die Änderung des Magnetfeldes ist gegeben durch

$$b'(\tau) = \frac{1 - 2\lambda y b^2}{1 + \lambda (1 - y^2)}$$

Der Stromanstieg ist variabel; er fällt zunächst und steigt erst später wieder an. Das Magnetfeld verläuft zwischen den Geraden $b = \tau$ für kleine τ und $b = \tau/(1 + \lambda)$ für große τ , entsprechend den dann wirksamen Induktivitäten $L = L_a$ und $L = L_a + L_s$. Abb. 1 zeigt den Verlauf von y , b und b' für $\lambda = 5$.

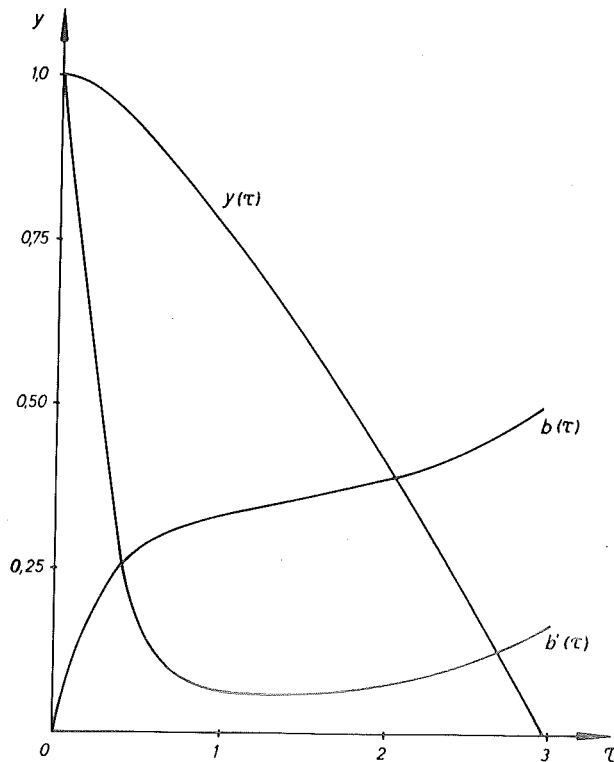


Abb. 1

Plasmaradius y , Magnetfeld b und Magnetfeldanstieg b' nach dem free-particle Modell für ein Induktivitätsverhältnis $\lambda = 5$.

Die Implosionszeit.

Wesentlicher als die Bestimmbarkeit expliziter Ausdrücke für den Radius als Funktion der Zeit ist der Umstand, daß aus dem free-particle Modell unmittelbar ein Ausdruck für die Implosionszeit des Plasmazylinders als Funktion des Induktivitätsverhältnisses λ folgt. Für den Zeitpunkt der vollständigen Kompression des Plasmas in der Achse erhält man aus Gleichung (1.17) mit $y = 0$

$$(1.18) \quad \tau_c = 1,41 \left(1 + \frac{2}{3} \lambda \right)^{1/2}$$

Für kleine λ ist daher bis auf den konstanten Faktor aus Gleichung (1.18) die Implosionszeit durch t_c selbst gegeben. Für $\lambda \gtrsim 1$ wird der Einfluß der Spuleninduktivität auf den zeitlichen Verlauf des Kompressionsvorgangs wirksam.

Die Annahme $y = 0$ für den Zeitpunkt der maximalen Kompression ist natürlich unrealistisch; sie ist gleichbedeutend mit der Annahme unendlich hoher Kompressionsgrade. Jedoch gibt das Modell in seiner elementaren Form keine Möglichkeit, einen von Null verschiedenen Minimalradius zu bestimmen. Die Lösungskurven existieren sogar für negative y -Werte, ein weiteres Anzeichen dafür, daß das einfache Modell nicht mehr anwendbar ist, wenn der Radius sehr klein gegenüber 1 wird. Die Abänderungen, die dann noch innerhalb des Rahmens der dem free-particle Modell zugrundeliegenden Vorstellungen vorgenommen werden können, um das Modell der Wirklichkeit anzupassen, werden in 1.4 betrachtet werden. Hier sei nur festgestellt, daß für kleine y die Zeit $\tau(y)$ relativ unempfindlich gegenüber Änderungen des Radius ist. Bei kleinen Minimalradien kann daher τ_c als eine Abschätzung für die tatsächlich bis zur Erreichung des ersten Kompressionsmaximums erforderliche Zeit gelten. In absoluten Einheiten wird die Zeit von Beginn der Kompression bis zur Erreichung des Kompressionsmaximums

$$(1.19) \quad T_c = \left[\left(L_a + \frac{2}{3} L_s \right) \frac{a_0 \ell}{U_0} \sqrt{\frac{\rho_0}{\mu_0}} \right]^{1/2}$$

oder numerisch mit den gleichen Einheiten wie in Gleichung

$$(1.19a) \quad T_c \approx 0,055 \left[\left(L_a + 0,67 L_s \right) \frac{a_0 \ell}{U_0} \sqrt{A \rho_0} \right]^{1/2} \mu\text{sec}$$

T_c nimmt mit L_a und mit L_S zu, wie zu erwarten ist, da beide die Trägheit des Vorgangs erhöhen. Doch trägt L_S nicht mit seinem vollen Wert zur äußeren Induktivität L_A bei. Aufgrund der Veränderlichkeit des Plasmaradius ist vielmehr ein Mittelwert der mit dem Fluß durch die Spule verbundenen Induktivität bestimmend für die Zeit bis zum Erreichen der Achse. Dieser Mittelwert ist proportional zu L_S mit einem von λ unabhängigen Faktor, und kleiner als L_S selbst, weil die mit dem Fluß durch die Spule verbundene Induktivität anfangs null ist und erst während der Zeit T_c auf den Wert L_S ansteigt.

Die Energieaufnahme des Plasmas während der Kompression.

Im folgenden wird die Energie betrachtet, die das Plasma nach dem free-particle Modell während der Kompression aufnimmt. Die analytisch einfache Form des Modells ermöglicht es, geschlossene Ausdrücke dafür anzugeben. Anhand dieser sollen die verschiedenen Abhängigkeiten eingehender untersucht werden, da es sich bei der Energie um eine wegen der Zielsetzung magnetischer Kompressionsexperimente wesentliche Größe handelt, auf die auch die Dimensionierung Rücksicht zu nehmen hat. Die auf das Plasma übertragene Energie ist gleich der Arbeit der Lorentzkräfte bei der Kompression und zunächst noch allgemein gegeben durch

$$(1.20) \quad E_{kin} = 2\pi \int_0^t a \frac{B^2}{2\mu_0} \dot{a} dt$$

Dafür kann wegen der Bewegungsgleichung (1.1) jetzt speziell für das free-particle Modell geschrieben werden

$$(1.21) \quad E_{kin} = 4\pi \int_a^{a_0} a n_0 m \dot{a}^2 da$$

Daß dieser Ausdruck tatsächlich die Energie darstellt, die nach dem vorliegenden Modell in der Plasmabewegung steckt, erkennt man unmittelbar: Das einzelne Teilchen hat nach der Reflexion an der Grenz-

schicht die Geschwindigkeit $2\dot{a}$, daher die Energie $m(2\dot{a})^2/2$, und die Zahl der während der Zeit dt mit der Geschwindigkeit $2\dot{a}$ von der magnetischen Wand reflektierten Teilchen beträgt $2\pi n_0 a da$, wenn man nur die Reflexion der anfangs ruhenden Teilchen betrachtet, deren Dichte am Kolben unabhängig vom Radius gleich der Anfangsdichte n_0 des Plasmas ist.

Führt man in (1.21) die Lösung für \dot{a} ein, so wird bis auf einen dimensionsbehafteten Faktor

$$(1.22) \quad E_{kin}(\gamma) \sim F(1, \lambda) - F(\gamma, \lambda)$$

mit

$$(1.23) \quad F(\gamma, \lambda) = 2 \int \frac{1 + \frac{2}{3}\lambda - (1+\lambda)\gamma + \frac{1}{3}\gamma^3}{[1 + \lambda(1-\gamma^2)]^2} \gamma d\gamma.$$

Man erhält für die Energie in Abhängigkeit von Radius und Induktivitätsverhältnis

$$(1.24) \quad \frac{E_{kin}(\gamma)}{\hat{E}_{kin}} = (1 + \lambda) \frac{1 + 2\gamma^3 - 3\gamma^2}{1 + \lambda(1 - \gamma^2)}$$

Abb. 2 gibt den Verlauf von (1.24) für verschiedene λ . Nach oben aufgetragen ist die Energie, bezogen auf die maximal erreichbare Energie \hat{E}_{kin} für $\gamma = 0$, nach rechts der vom Plasmazylinder aus der Anfangslage $\gamma = 1$ zurückgelegte Weg. Man sieht, wie die auf \hat{E}_{kin} bezogenen Energiewerte für verschiedene Induktivitätsverhältnisse λ bei festem γ verhältnismäßig wenig voneinander abweichen und zwischen der unteren Grenzkurve für $\lambda = 0$ und der gestrichelt gezeichneten oberen Grenzkurve für $\lambda \rightarrow \infty$ liegen. Weiter sieht man, daß die Energie in der Nähe der Achse nur noch wenig zunimmt, der Hauptteil wird bei großen bis mitt-

leren Radien aufgenommen, obwohl dort das Magnetfeld zunächst schwächer ist als später in der Nähe von $y = 0$. Wenn das Modell in Achsennähe unrichtig wird, das Integral (1.23) daher bei einem bestimmten Radius abgeschnitten werden muß, kann trotzdem (1.24) wegen der langsamen Veränderlichkeit für kleine y als eine Abschätzung für die Plasmaenergie betrachtet werden.

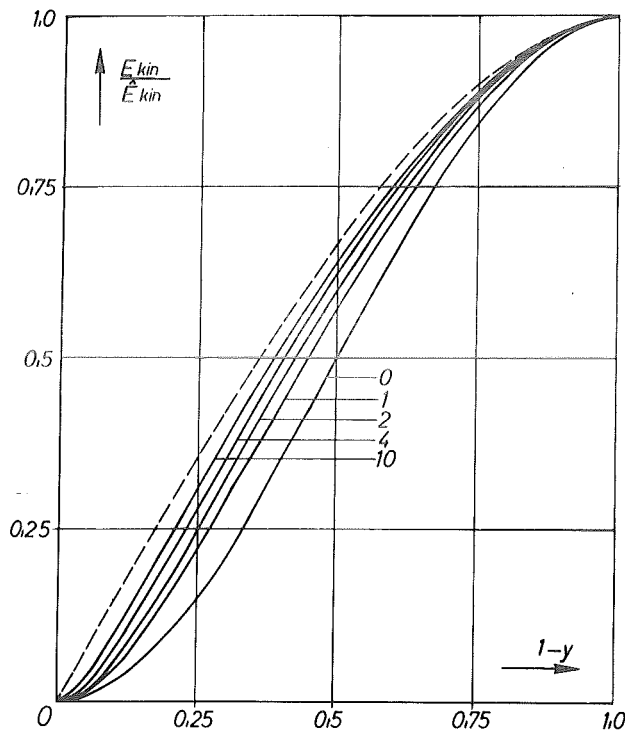


Abb. 2

Die Energie des Plasmas nach dem free-particle Modell in Abhängigkeit von der Entfernung des Plasmazylinders aus seiner Anfangslage. Die Zahlen an den Kurven bezeichnen den zugehörigen λ -Wert. Die gestrichelte Linie ist die Grenzkurve für $\lambda \rightarrow \infty$.

Für die Energie \hat{E}_{kin} selbst, die nach dem free-particle Modell erreicht wird, wenn der Plasmaradius Null würde, ergibt sich

$$(1.25) \quad \hat{E}_{\text{kin}} = \frac{2}{3} a_0 \sqrt{\frac{\rho_0}{\mu_0}} U_0 \frac{\lambda}{1 + \lambda}$$

Zunächst entnimmt man Gleichung (1.25), daß die Energie nicht von den Induktivitäten selbst, sondern nur von deren Verhältnis λ abhängig ist. Die beiden letzten Faktoren in (1.25) geben die Spannung an der Spule, genauer die an der Innenseite des Entladungsrohres liegende Spannung, die mit U_E bezeichnet sei

$$U_E = \frac{L_s}{L_a + L_s} U_0$$

Für gute Energieübertragung auf das Plasma wird man λ groß wählen, d.h. die äußere Induktivität L_a klein gegenüber der Spuleninduktivität L_s halten, was im Hinblick auf die bei großen L_a erforderliche nutzlose Magnetfeldenergie unmittelbar einzusehen ist. Die Forderung großer

λ - Werte bedeutet auch kleines L_a . Andererseits hat es keinen Sinn, λ sehr groß zu wählen und auf äußerste Kleinheit von L_a zu achten.

Bereits die beiden Fälle $\lambda = 5$ und $\lambda = 10$ unterscheiden sich bei sonst gleichen Bedingungen um weniger als 1/10 in der Energie (1.25). Die

Funktion U_E/U_0 erreicht eben sehr rasch ihren asymptotischen Wert 1.

Aus (1.25) entnimmt man weiter, daß die Endenergie bei festem λ nur

über die Liniendichte $N = \pi a_0^2 n_0$ des Plasmas vom Anfangsradius a_0

abhängig ist. Es ist nur die je Längeneinheit des Plasmazylinders zu

beschleunigende Masse, nicht deren Dichte und daher nicht der Anfangs-

radius des Plasmazylinders bestimmend für die erreichbare Energie,

wenn die elektrischen Daten des Kreises festgehalten werden oder auch

nur die Spannung bei großen λ . Man hat sich vorzustellen, daß bei gleicher

Spannung U_E zwar die induzierte elektrische Feldstärke und damit alle zu dieser proportionalen Größen, wie die radiale elektrostatische Feldstärke in der E-Schicht, mit a_0^{-1} abnehmen, dagegen die Wege, auf denen die Kräfte Arbeit leisten, mit a_0 zunehmen.

Bezieht man die Energie (1.25) auf das einzelne Teilchen, so kommt für die Ionen

$$(1.26) \quad kT_i = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{m_i}{\pi \mu_0}} \frac{U_E}{N^{1/2}} .$$

Die Teilchenenergie ist hier durch eine Temperatur T_i charakterisiert. Ob die allgemein übliche Anwendung des Temperaturbegriffes auf die Teilchenenergien am Ende der ersten Kompressionsphase sinnvoll ist, soll hier nicht untersucht werden. Wenn die Kompressionsgrade am Ende der ersten Kompressionsphase sehr hoch und damit die Dichten groß sind, ist jedenfalls starke Wechselwirkung der Ionen und damit eine Thermisierung der Energien zu erwarten. Für die Einleitung thermonuklearer Reaktionen sind bei schnellen Kompressionsexperimenten hohe Kompressionsgrade offenbar ebenso wesentlich wie hohe Teilchenenergien.

Nachtrag: Ableitung des Ausdruckes (1.20) für die Energie.

Die bis zum Zeitpunkt t von der Kondensatorbatterie geleistete Arbeit beträgt

$$(1.27) \quad W = \int_0^t U_c I dt ,$$

also nach Einsetzen für die Kondensatorspannung U_C aus der Kreisgleichung

$$(1.27a) \quad W = \int_0^t I \frac{d}{dt} (LI) dt$$

Da diese Arbeit ausschließlich zum Aufbau des Magnetfeldes und zur Beschleunigung des Plasmas geleistet wird, daher in der magnetischen Feldenergie des Kreises und in der kinetischen Energie des Plasmas steckt, folgt

$$\begin{aligned}\frac{L}{2} I^2 + E_{kin} &= \int_0^t I \frac{d}{dt}(LI) dt \\ &= \int_0^t I^2 \frac{dL}{dt} dt + \int_0^t IL \frac{dI}{dt} dt\end{aligned}$$

Wegen

$$2IL dI = d(LI^2) - I^2 dL$$

wird damit die Energie des Plasmas

$$E_{kin} = \frac{1}{2} \int_0^t I^2 \frac{dL}{dt} dt$$

Mit $dL = -\lambda L_a dy^2$ und $\lambda L_a = L_s$ folgt daraus

$$E_{kin} = \frac{\pi \mu_0}{\ell} \int_a^{a_0} I^2 a da$$

und nach Einführung des Magnetfeldes B_z an Stelle von I

$$(1.28) \quad E_{kin} = \ell \int_a^{a_0} 2\pi a \frac{B_z^2}{2\mu_0} da$$

Der Ausdruck (1.28) für die kinetische Energie des Plasmas unterscheidet sich von (1.20) durch den Faktor l , die Länge der Spule. In der Tat handelt es sich hier, wie aus der Ableitung hervorgeht, um die gesamte kinetische Energie des Plasmas, dagegen in (1.20) nur um die kinetische Energie je Längeneinheit des Plasmazylinders.

1.4 Ergänzungen zum free-particle Modell.

Der Einfluß der mehrfachen Reflexion von Teilchen.

Die bislang benutzte Gleichung (1.1) für die Kompressionsbewegung nach dem free-particle Modell setzt voraus, daß nur jeweils ruhende Teilchen von der Grenzschicht erfaßt und ins Innere des Plasmas reflektiert werden. Da aber die Geschwindigkeit, mit der die E-Schicht nach innen läuft, zunächst stark zunimmt, werden bereits bewegte Teilchen wieder eingeholt und erneut beschleunigt. Der Beitrag dieser Teilchen zum Druck beträgt

$$(1.29) \quad 2\rho (a_0 t_c^{-1})^2 \left[y'(\tau) - 2y'(\tau_0) \right]^2,$$

worin $y'(\tau)$ die momentane Geschwindigkeit der E-Schicht und $y'(\tau_0)$ die Geschwindigkeit der E-Schicht zur Startzeit der zur Zeit τ erneut von der Grenzschicht erfaßten Teilchen bedeutet. Im Fall einer ebenen Wand ist die Dichte ρ dieser Teilchen gleich der anfänglichen Dichte ρ_0 , wogegen beim zylindrischen Problem die Teilchendichte ρ infolge des radialen Zusammenlaufens der Teilchen mit dem reziproken Radius des Teilchenortes zunimmt

$$\rho(\tau) = \rho_0 \frac{y(\tau_0)}{y(\tau)}$$

Zunächst ist festzustellen, wann eine zwei- oder mehrmalige Reflexion von Teilchen an der E-Schicht zustande kommt. Dazu muß die Bahn oder, in hydrodynamische Bezeichnungsweise, die Lebenslinie eines zur

Zeit $\tau = \tau_0$ reflektierten Teilchens, welche durch

$$(1.30) \quad y - y(\tau_0) = 2y'(\tau_0)(\tau - \tau_0)$$

mit $\tau \geq \tau_0$ gegeben ist, vor Ablauf der Kompressionszeit τ_c die Lebenslinie der E-Schicht schneiden. Gleichung (1.30) muss daher mit $y(\tau)$ aus Gleichung (1.17) einen zwischen τ_0 und τ_c gelegenen Wert $\tau = \tau_s$ liefern. Die analytische Form von $y(\tau)$, $y'(\tau_0)$ erlaubt es nicht, einen solchen Wert τ_s unmittelbar anzugeben. Ebenso umständlich erweist sich die Berechnung der Bewegung mit Berücksichtigung des Beitrages (1.29) im allgemeinen Fall, d.i. ohne weitere Zusatzannahmen.

Wenn man jedoch den Einfluß der zweiten Reflexion nur für den Anfang der Bewegung betrachtet, läßt sich leicht eine Abschätzung dieses Einflusses angeben. Dann sind τ_0 und τ_s benachbart, und der Beitrag der zum zweiten Mal reflektierten Teilchen zur Impulsbilanz kann durch eine erste Näherung in $\delta\tau = \tau - \tau_0$ erfaßt werden. Zunächst ist die vollständige Bewegungsgleichung mit Berücksichtigung des Beitrages (1.29)

$$(1.31) \quad p = y'^2(\tau) + [y'(\tau) - 2y'(\tau_0)]^2$$

Darin bezeichne p den magnetischen Druck in Einheiten $2p_0(a_0 t_c^{-1})^2$. Setzt man für $y'(\tau_0)$ die Entwicklung an der Stelle $\tau = \tau_0 + \delta\tau$ ein, so entsteht bei Vernachlässigung quadratischer und höherer Terme von $\delta\tau$ in der Klammer in Gleichung (1.31)

$$(1.32) \quad p = y'^2 + (2y''\delta\tau - y')^2.$$

Hierin sind alle Funktionswerte an der Stelle τ zu nehmen. Die Differenz $\delta\tau$ zwischen der Zeit der ersten und der zweiten Reflexion folgt aus Gleichung (1.30) in derselben Näherung wie Gleichung (1.32) zu $2y'/3y''$,

Damit wird die Bewegungsgleichung

$$p = \left(1 + \frac{1}{9}\right) \gamma'^2$$

Der Typ der Differentialgleichung ändert sich demnach in dieser Näherung für den Beitrag der zweimalig reflektierten Teilchen nicht gegenüber früher, und auch die Lösungen der Bewegungsgleichung bleiben die gleichen. Die zweite Reflexion wirkt sich in dieser Näherung nur so aus, als ob die Dichte der ruhenden Teilchen relativ um den Betrag $1/9$ gegenüber dem tatsächlichen Wert erhöht wäre. Da die für den Ablauf der Bewegung maßgebende Zeiteinheit durch t_c gegeben, t_c selbst aber nur proportional zur vierten Wurzel aus der Dichte ist, verläuft die Bewegung durch den Einfluß der zweiten und mehrerer Reflexionen derselben Teilchen um den Faktor 1,03 langsamer als in 1.3 berechnet. Dieser Unterschied ist innerhalb der Genauigkeit des Modells völlig vernachlässigbar. Wenn man in Gleichung (1.32) den quadratischen Term beibehalten würde, ergäbe sich

$$p = \frac{10}{9} \gamma'^2 + \frac{8}{3} \frac{\gamma'^3 \gamma'''}{\gamma''^2}$$

Damit ändert sich der Typ der Differentialgleichung, wodurch die strenge Lösbarkeit der Bewegungsgleichung verloren geht. Die Näherung in Gleichung (1.32) setzt ersichtlich voraus $\gamma' \gamma''' \ll \gamma''^2$

Wegen $\gamma'' \approx 1$, $\gamma''' \approx \gamma'$ bedeutet die Näherung $\gamma'^2 \ll 1$; diese Voraussetzung ist noch für relativ große τ ($\gamma' \approx \tau$) erfüllbar. Zusatzterme von der gleichen Größenordnung liefert auch die Berücksichtigung der Zylindergeometrie des Problems durch den Faktor $\gamma(\tau_0) / \gamma(\tau)$ vor der Klammer in Gleichung (1.31), die deshalb von Anfang an bereits vernachlässigt wurden.

Berücksichtigung der Gegenströmung von Teilchen.

In den späteren Phasen der Kompressionsbewegung werden keine Teilchen mehr von der E-Schicht eingeholt, da sich die Geschwindigkeit der E-Schicht nur noch wenig ändert. Dann aber werden die Teilchen wirksam, die von gegenüberliegenden Stellen des Plasmazylinders herkommend, durch die Achse gegangen sind, oder auch Teilchen, die durch elastische Reflexionen mit gegenströmenden Teilchen in der Achse des Plasmazylinders auf ihre Ausgangsstelle in der Grenzschrift, aber mit umgekehrter Bewegungsrichtung, zurückkehren. Wenn keine Dispersion des Teilchenstrahls beim Durchgang durch die Achse oder bei der Reflexion in der Achse eintritt, also der Stoß des Teilchens als zentral vorausgesetzt wird, besteht zwischen beiden Fällen in der Wirkung auf den Bewegungsvorgang kein Unterschied. Der Zeitpunkt des Eintreffens von Teilchen mit einer zur augenblicklichen Bewegungsrichtung der E-Schicht entgegengesetzt gerichteten Geschwindigkeit ergibt sich als Schnitt der Bahn Gleichung (1.30) dieser Teilchen mit der Lebenslinie der diametral gegenüberliegenden Stelle der E-Schicht, die durch den negativen Ausdruck der durch Gleichung (1.17) definierten Funktion $y(\tau)$ gegeben ist. Führt man der leichteren Unterscheidung wegen s als Startzeit der Teilchen ein, so ist der Zeitpunkt τ des Auftretens von Gegenströmung in Abhängigkeit von der Startzeit s bestimmt durch

$$(1.33) \quad y(\tau) + y(s) = -2y'(s)(\tau - s),$$

worin die Funktionen $y(\tau)$, $y(s)$ durch Gleichung (1.17) definiert sind. Nach dem Zeitpunkt des ersten Auftretens von Gegenströmung lautet die Bewegungsgleichung mit Berücksichtigung des Beitrags der gegenströmenden Teilchen zum Impuls

$$(1.34) \quad p = y'^2 + \frac{y(s)}{y} [y' + 2y'(s)]^2.$$

Die Bewegungsgleichung gilt in dieser Form, solange die Bewegung kompressiv ist, also noch ruhende Teilchen von der Grenzschicht erfaßt werden. Schreibt man die Differentialgleichung (1.34) als expliziten Ausdruck für y' , so sieht man, daß wegen $y'(s) < 0$ eine Kompression des Plasmas nach dem Auftreten von Gegenströmung nur möglich ist, wenn folgende Ungleichung gilt

$$(1.35) \quad \frac{\gamma(\tau) p(\tau)}{\gamma(s) p(s)} > 4$$

Diese Bedingung bedeutet, daß der magnetische Druck im Zeitpunkt des Auftretens von Gegenströmung einen durch Gleichung (1.35) festgelegten, nur von λ abhängigen Wert überschreiten muß, um den Impuls der gegenströmenden Teilchen aufzufangen und eine weitere kompressive Bewegung zu ermöglichen.

Wenn hingegen die Bedingung (1.35) nicht erfüllt ist, wird die Bewegung expansiv, $y' > 0$, und der erste Term rechts in Gleichung (1.34) ist zu streichen. Dann lautet die Differentialgleichung für die Bewegung nach dem Auftreten von Gegenströmung

$$(1.36) \quad y' = -2y'(s) - \left(\frac{y}{y(s)} \right)^{1/2} p^{1/2}$$

In den Gleichungen (1.34) und (1.36) ist für das nicht bezeichnete Argument τ , für das Argument s die über Gleichung (1.33) definierte Funktion $s(\tau)$ eingesetzt zu denken.

Die analytische Berechnung des Bewegungsablaufs nach dem Auftreten von Gegenströmung ist schon wegen der Schwierigkeiten in der Bestimmung von $s(\tau)$ aus Gleichung (1.33) sehr kompliziert. Die Berechnung des Zeitpunktes τ_1 , in dem erstmals Gegenströmung auftritt, und von dem ab eine der beiden Gleichungen (1.34) und (1.36) für die weitere Berechnung der Bewegung verwendet werden müssen, kann erheblich verkürzt werden durch die Überlegung, daß in diesem Zeitpunkt $d\tau/ds = 0$ sein muß. Auch besitzt die Einführung von $y_0 = y(s)$ und $y_1 = y(\tau)$ an Stelle von s und τ rechnerische Vorteile. Für den im Hinblick auf die Anwendung

allerdings wenig interessanten Fall kleiner λ , d.i. mit $\lambda = 0$ lassen sich mit Ausnutzung dieser Vereinfachungen y_0 und y_1 schnell analytisch berechnen, und es folgt $y_0 \approx 0,62$ und $y_1 \approx 0,14$. Die Bedingung (1.35) ist mit diesen Werten nicht erfüllt, daher wird die Bewegung unmittelbar nach dem Auftreten von Gegenströmung expansiv. Die Lebenslinie der E-Schicht steigt dann im Kompressionsmaximum nicht glatt, sondern mit einem Knick zu größeren y -Werten an. Die tatsächliche Implosionszeit des Plasmazylinders ist unter diesen Umständen durch die Zeit τ_1 des ersten Auftretens von Gegenströmung gegeben; sie ist daher für $\lambda = 0$ relativ nur um den Betrag 0,07 kleiner als die in 1.3 berechnete Implosionszeit τ_c .

Unmöglichkeit, in magnetischen Kompressionsexperimenten eine Überkompression des Plasmas in der Achse zu verwirklichen.

In der bereits mehrfach erwähnten Arbeit von Rosenbluth - Garwin¹⁷ findet sich eine kurze Notiz, wonach ein "super pinch" möglich sei, wenn der elektrische Entladekreis eine große äußere Induktivität besitze. Als super pinch wird dabei eine Plasmakontraktion bezeichnet, bei der die zu verschiedenen Zeiten von der E-Schicht in das Plasmaminnere hinein reflektierten Teilchen zu gleicher Zeit durch die Achse gehen, wodurch dann dort kurzzeitig hohe Teilchendichten auftreten, die eine starke Wechselwirkung der Teilchen und daher hohe Reaktionsraten elastischer thermisierender und auch inelastischer zu Fusionsreaktionen führender Stöße bspw. von Deuteronen zur Folge haben.

Wir leiten hier das Kriterium für die Entstehung einer derartigen Überkompression des Plasmas aus dem free-particle Modell ab und zeigen, daß mittels eines magnetischen Kompressionsexperimentes ein solcher Fall nicht verwirklicht werden kann. Der Zeitpunkt τ , in dem ein zur Zeit τ_0 von der Grenzsicht reflektiertes Teilchen die Achse erreicht, ist gegeben durch Gleichung (1.30) mit $y = 0$:

$$(1.37) \quad -\gamma(\tau_0) = 2\gamma'(\tau_0)(\tau - \tau_0)$$

Wenn alle Teilchen zu gleicher Zeit durch die Achse gehen, ist die durch Gleichung (1.37) definierte Funktion $\tau(\tau_0)$ eine Konstante, Durch Ableitung von Gleichung (1.37) nach τ_0 folgt daher

$$\tau - \tau_0 = \gamma' / 2\gamma''$$

Einsetzen in Gleichung (1.37) für $\tau - \tau_0$ und Integration ergibt dann als Bedingung für den super pinch

$$(1.38) \quad \gamma\gamma' = \text{const}$$

Im free-particle Modell ist nun γ' proportional zum Magnetfeld. Deshalb bedeutet die Forderung (1.38)

$$(1.38a) \quad B = \text{const} \cdot \gamma^{-1}$$

In dem von Rosenbluth - Garwin behandelten z-Pinch gilt für das azimuthale Magnetfeld $B \sim I/\gamma$, so daß als Bedingung für das Zustandekommen einer Überkompression eine während des Kontraktionsvorganges konstante Stromstärke gefordert werden muß, realisierbar durch eine hohe äußere Induktivität.

In einem magnetischen Kompressionsexperiment ist dagegen das Magnetfeld mit einem konstanten, γ -unabhängigen Faktor proportional zum Strom, so daß für die Entstehung einer Überkompression die Stromstärke entsprechend (1.38a) umgekehrt proportional zum Plasmaradius zunehmen müßte. Damit ein solcher Stromverlauf möglich ist, muß die Spannung an der Spule während der Kompression erhöht werden. Der Spannungsverlauf bei einer Kondensatorentladung zeigt jedoch gerade das umgekehrte Verhalten.

2. Der Ablauf des Kompressionsvorganges nach dem Schneepflug-Modell bei eingeschlossenem inneren Magnetfeld.

2.1 Das Schneepflug-Modell.

Das free-particle Modell bietet, worauf schon hingewiesen wurde, in der in 1.3 diskutierten Form keine Möglichkeit, den am Ende der ersten Kompressionsphase erreichten Minimalradius zu bestimmen. Es war das Ziel der in 1.4 beschriebenen Erweiterung der Bewegungsgleichung für das free-particle Modell, welche die Gegenströmung bereits reflektierter Teilchen berücksichtigt, eine genauere Berechnung der Zeit bis zum ersten Kompressionsmaximum durchzuführen, den Minimalradius des Plasmas am Ende der ersten Kompressionsphase zu bestimmen, und den expansiven Teil der Plasmabewegung zu erfassen.

Die angedeutete Erweiterung ist jedoch nur dann sinnvoll, wenn sich die Plasmateilchen nach der Reflexion von der Grenzschicht wirklich radial auf geraden Bahnen durch das Plasma bewegen. Wenn jedoch in dem von der Grenzschicht eingeschlossenen Volumen ein Magnetfeld vorhanden ist, wird die Vorstellung von rein radial sich bewegenden Teilchen unrealistisch. Da die Anfangsgeschwindigkeit der Teilchen gering ist, ist zumindest im Anfang der Bewegung der Gyrationradius selbst der Ionen klein gegenüber dem Radius des Plasmazylinders. Bereits reflektierte Teilchen kehren dann infolge ihrer Gyrationbewegung wieder in die Grenzschicht zurück und liegen dort an, genau wie es der dem Schneepflug-Modell zugrunde liegenden Vorstellungen entspricht. Durch die Kompression steigt das innere Magnetfeld an, so daß trotz erhöhter Geschwindigkeit der Teilchen derselbe Effekt auch in späteren Phasen wirksam bleibt. Das bedeutet, daß die Teilchen jetzt auch am inneren Magnetfeld reflektiert werden und die Bewegung der Teilchen zwischen zwei magnetischen Wänden erfolgt, deren Grenzflächen sich mit der Zeit infolge der Kompressionsbewegung verschieben. Anstelle des Impulses der gegenströmenden Teilchen begrenzt dann der Druck des inneren Magnetfeldes die inwärts gerichtete Bewegung des Plasmas.

Für nicht homogen ionisierte Plasmen spricht noch ein anderer Grund gegen die Anwendung des free-particle Modells. Das free-particle Modell setzt schwache Wechselwirkung der reflektierten Teilchen mit den noch ruhenden Teilchen im Inneren des Plasmas voraus. Dies trifft für ein weitgehend durchionisiertes Plasma zu, nicht aber für ein Neutralgas oder ein Plasma mit geringem Ionisationsgrad. Wenn sich die hochleitende Grenzschrift in ein Neutralgas oder in ein schwach ionisiertes Plasma hineinbewegt, können die reflektierten Teilchen durch inelastische Stöße mit Neutralteilchen ihre Energie verlieren. Aber schon die Reflexion von Teilchen aus der Schicht heraus wird fraglich²¹. Die Grenzschrift ist ein Gebiet hoher Stromdichte, in die bei der inwärts gerichteten Bewegung Neutralteilchen hineingelangen und teilweise ionisiert werden. Diejenigen Teilchen, die die Schicht nicht zu durchdringen vermögen, bleiben vermutlich eingefangen, ohne ins Plasma hineinreflektiert zu werden. Ein solcher Einfang von Teilchen in einer Grenzschrift ist wieder erst recht wahrscheinlich, wenn sich das Neutralgas oder das schwach ionisierte Plasma in einem Magnetfeld befindet.

Für die Vermutung des Einfangs der Teilchen in einer relativ dünnen Schicht spricht die experimentelle Beobachtung, wonach nur ein kleines Ringgebiet am Rande des Plasmazylinders stark leuchtend ist, während das Innere nur wenig Licht emittiert, daher von geringerer Temperatur ist und möglicherweise nur aus Neutralgas besteht.

Ursprünglich war bei den Experimenten an die zusätzliche Einführung eines axialen Magnetfeldes gedacht als Sonde für den Ablauf des Kompression s-vorganges. Die speziellen Versuchsbedingungen bei magnetischen Kompressionsexperimenten bedingen aber ohne jedes Zutun bereits ein axiales Magnetfeld innerhalb des Plasmas, so daß es gerade umgekehrt besonderer Vorkehrungen bedarf, um dieses innere Magnetfeld aufzuheben oder seinen Wert in definierter Weise vorzugeben.

Mit der Untersuchung der Bewegung eines Plasmas mit innerem Magnetfeld nach dem Schneepflug-Modell befaßt sich der folgende Abschnitt. Zunächst wird gezeigt, mit welchen Annahmen die Gleichung für das

Schneepflug-Modell aus der magneto-hydrodynamischen Bewegungsgleichung folgt, und wie an Stelle des äußeren magnetischen Druckes in der ursprünglichen Rosenbluth - Garwischen¹⁷ Form der Bewegungsgleichung für das Schneepflug-Modell jetzt die Differenz aus äußerem und innerem magnetischen Druck erscheint. Mit der hier gegebenen Ableitung wird auch eine gewisse Unsicherheit geklärt, die durch eine alternative Schreibweise der Gleichung des Schneepflug-Modells in der Literatur aufgetreten ist, Statt zur Definition des Impulses des Plasmas die ganze Masse einzuführen, wählten einige Autoren die bewegte Masse, die sich in einem Sektor mit Öffnungswinkel 1 rad befindet. Die hier gegebene Ableitung ist zwangsläufig und bestätigt den ursprünglichen Rosenbluth - schen Ansatz.

Die Ableitung der Gleichung für das Schneepflug-Modell aus der magneto-hydrodynamischen Bewegungsgleichung.

Die magneto-hydrodynamische Bewegungsgleichung für das Strömungsfeld eines Plasmas lautet in ihrer allgemeinen Form:

$$(2.1) \quad \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = - \nabla \cdot \mathbf{P} + \mathbf{j} \times \mathbf{B}$$

Darin bezeichnen, wie in der hydrodynamischen Bewegungsgleichung, $\frac{d}{dt}\mathbf{v}$ die totale zeitliche Ableitung der Geschwindigkeit $\mathbf{v} = \mathbf{v}(t)$, $\nabla \cdot \mathbf{P}$ die Divergenz des Drucktensors \mathbf{P} und $\mathbf{j} \times \mathbf{B}$ die Lorentz-Kraftdichte auf das Plasma, genauer auf die Träger des Stromes der Dichte \mathbf{j} im Magnetfeld \mathbf{B} . Die Voraussetzung für die Gültigkeit der Gleichung (2.1) sind die Quasi-Neutralität des Plasmas und die Kleinheit des Massenverhältnisses m_e/m_i der Elektronen und Ionen, aus denen sich das Plasma zusammensetzt. Wenn man die durch den Drucktensor bedingten Kräfte als klein gegenüber den elektromagnetischen Kräften vernachlässigt, was bei geringen Dichten und Anfangstemperaturen des zu komprimierenden Plasmas und bei den hohen Magnetfeldstärken magnetischer Kompressionsexperimente sicher erlaubt ist, ergibt sich bei Anwendung der Gleichung (2.1) auf ein radial-

symmetrisches Plasma für die r-Komponente

$$(2.2) \quad \rho \left(\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} \right) = (j \times L)_r ,$$

worin v_r die lokale radiale Geschwindigkeit des Plasmas bedeutet. In Gleichung (2.2) ist außerdem $\partial/\partial z = 0$ angenommen, d.i. längs der Achse des Plasmazylinders sollen die gleichen Verhältnisse herrschen. Es wird also ein unendlich langer Plasmazylinder betrachtet, ohne z-Abhängigkeit, entsprechend der Voraussetzung einer langen Spule. Mit der zweiten Maxwellschen Gleichung bei Vernachlässigung der Verschiebungsstromdichte

$$\frac{\partial B_z}{\partial r} = -\mu_0 j_\theta$$

wird die r-Komponente der magnetischen Kraftdichte

$$(j \times L)_r = j_\theta B_z = -\frac{1}{\mu_0} B_z \frac{\partial B_z}{\partial r} ,$$

die sich daher in bekannter Weise durch den Gradienten des magnetischen Druckes

$$p_m = \frac{B_z^2}{2\mu_0}$$

darstellen läßt.

Integration der Bewegungsgleichung über den Querschnitt des Plasmazylinders zwischen den Grenzen a_1 und $a_2 = a_1 + d$ gibt zunächst

$$(2.3) \quad \int_{a_1}^{a_2} 2\pi \rho \left(\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} \right) r dr = -2\pi \int_{a_1}^{a_2} r \frac{\partial p_m}{\partial r} dr .$$

Darin bedeutet a_2 den äußeren Radius des Plasmazylinders, a_1 dagegen eine Stelle im Innern des Plasmas mit der Eigenschaft

$$v_r(r, t) = 0 \quad \text{für } r \leq a_1 .$$

Die Funktionswerte an den Stellen a_1 und a_2 sollen der kürzeren Bezeichnung wegen mit dem Index 1 bzw. 2 bezeichnet werden. Partielle Inte-

gration der rechten Seite von (2.3) liefert jetzt

$$2\pi \int_{a_1}^{a_2} r \frac{\partial p_m}{\partial r} dr = 2\pi \left[r p_m \right]_{a_1}^{a_2} - 2\pi \int_{a_1}^{a_2} p_m dr$$

Wegen $p_m > 0$ wird das zweite Integral rechts

$$\int_{a_1}^{a_2} p_m dr < \begin{cases} p_2 d & \text{für } p_2 > p_1 \\ p_1 d & \text{" } p_2 < p_1 \end{cases}$$

und geht daher mit d gegen Null, so daß mit Vernachlässigung eines weiteren Beitrages proportional zu d/a_2

$$(2.4) \quad 2\pi \int_{a_1}^{a_2} r \left(\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} \right) dr = -2\pi a_2 (p_2 - p_1)$$

Zur Berechnung des auf der linken Seite stehenden Integrals fügen wir im Integranden zu dem Ausdruck in der Klammer die mit v_r multiplizierte Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \rho v_r) = 0$$

hinzu; das Integral wird dann

$$(2.5) \quad 2\pi \int_{a_1}^{a_2} r \frac{\partial}{\partial t} (\rho v_r) dr + 2\pi \int_{a_1}^{a_2} \frac{\partial}{\partial r} (r \rho v_r^2) dr$$

Das zweite Integral in (2.5) läßt sich sofort integrieren und erkennen, daß sein Wert Null ist; man hat nämlich

$$(2.6) \quad \int_{a_1}^{a_2} \frac{\partial}{\partial r} (r \rho v_r^2) dr = a_2 \rho_2 v_2^2 - a_1 \rho_1 v_1^2$$

Da a_2 eine Stelle außerhalb der Grenzschicht im Vakuum bezeichnet, ist $\rho_2 = 0$, wogegen v_2 , als materielle Geschwindigkeit, dort keinen Sinn hat. Andererseits bedeutet a_1 eine Stelle vor der Grenzschicht im

noch unbewegten Plasma, weshalb im zweiten Term von (2.6) $v_1 = 0$.

Die linke Seite von (2.4) reduziert sich daher auf das Integral

$$(2.7) \quad 2\pi \int_{a_1}^{a_2} r \frac{\partial}{\partial t} (\rho v_r) dr = \int_{a_1}^{a_2} \frac{\partial F}{\partial t} dr$$

mit $F = 2\pi r \rho v_r$, da r von der Zeit unabhängig ist. Für (2.7) kann man schreiben

$$\int_{a_1}^{a_2} \frac{\partial F}{\partial t} dr = \frac{\partial}{\partial t} \int_{a_1}^{a_2} F dr - F_2 \dot{a}_2 + F_1 \dot{a}_1$$

Aus den gleichen Gründen wie vorhin sind aber hier F_2 und F_1 als proportional zu ρv_r gleich Null.

Nehmen wir nun noch die Geschwindigkeit in der Grenzschicht als homogen an,

$$v_r(r, t) = \dot{a}(t) \quad , \quad a_1 < r < a_2 \quad ,$$

worin \dot{a} die Geschwindigkeit, mit der sich auch die Grenzschicht verschiebt, so kommt

$$(2.8) \quad \int_{a_1}^{a_2} \frac{\partial}{\partial t} F(r, t) dr = \frac{\partial}{\partial t} \left(2\pi \dot{a} \int_{a_1}^{a_2} \rho r dr \right)$$

Es ist aber der Faktor zu \dot{a} die in der Grenzschicht enthaltene Masse, die gleich der seit Beginn der Bewegung von der Grenzfläche überstrichenen Masse ist, da keine Teilchen der Grenzschicht voraufgelaufen sind; anderenfalls wäre nicht vor der Grenzschicht $v_r = 0$. Daher ist

$$(2.9) \quad \begin{aligned} 2\pi \int_{a_1}^{a_2} \rho r dr &= 2\pi \int_{a_1}^{a_0} \rho_0 r dr \\ &= \pi \rho_0 \left[a_0^2 - a_2^2 \left(1 - 2 \frac{d}{a_2} \right) \right] , \end{aligned}$$

worin wieder wie im vorhergehenden d/a_2 zu vernachlässigen ist. Da das Integral in (2.8) nur mehr von der Zeit abhängig ist, bedeutet die partielle Ableitung zugleich die totale. Damit erhält man, wenn man wieder a statt a_2 für den äußeren Radius des Plasmazylinders setzt, als Gleichung für die Bewegung der Grenzschicht und damit für den Ablauf der Kompression

$$\frac{d}{dt} \left[\pi \rho_0 (a_0^2 - a^2) \frac{da}{dt} \right] = - 2\pi a (p_2 - p_1)$$

oder mit den Ausdrücken für p_2 und p_1

$$(2.10) \quad \frac{d}{dt} \left[\pi \rho_0 (a_0^2 - a^2) \frac{da}{dt} \right] = - 2\pi a \left(\frac{B_a^2}{2\mu_0} - \frac{B_i^2}{2\mu_0} \right)$$

In Gleichung (2.10) bedeuten B_a das Magnetfeld außerhalb des Plasmas im Vakuum und B_i das Magnetfeld innerhalb des Plasmas vor der Grenzschicht. Aus der hier gegebenen Ableitung von Gleichung (2.10) geht hervor, daß ein nicht vernachlässigbarer skalarer hydrodynamischer Druck additiv zu $B_i^2/2\mu_0$ mit seinem Wert vor der Grenzfläche a_1 auftreten würde. Durch Vernachlässigung des Drucktensors in Gleichung (2.2) ist aber dieser Term bereits in Gleichung (2.10) unterdrückt. Die von Rosenbluth-Garwin mitgeteilte Form der Bewegungsgleichung ergibt sich als Sonderfall aus (2.10) mit $B_i = 0$.

Da Gleichung (2.10) nur das Quadrat der inneren Feldstärke enthält, ist das Vorzeichen von B_i und damit die Richtung des inneren Magnetfeldes im vorliegenden Modell ohne Einfluß auf die Dynamik des Vorganges.

Was geschieht, wenn man die Voraussetzung einer homogenen Geschwindigkeit in der Grenzschicht aufgibt, geht aus Gleichung (2.8) hervor.

Setzt man an Stelle von $v_r(r, t) = \dot{a}(t)$ eine allgemeine Abhängigkeit

$$v_r(r, t) = f(r, t) \dot{a}(t),$$

so erscheint nach Ausführung der Integration von F ein zeitabhängiger Faktor $g(t)$ zu der Dichte ρ_0 , so daß in der Gleichung (2.10) an Stelle ρ_0

eine effektive Dichte $\rho_0 g(t) = \bar{\rho}(t)$ erschiene, die über $g(t)$ noch zeitabhängig sein würde. Indem man $g(t) = 1$ setzt, vernachlässigt man in Gleichung (2.10) einen Beitrag proportional zu \dot{g} . Weil nicht zu erwarten ist, daß sich die Struktur der Schicht während der Kompression wesentlich ändert, erscheint die Vernachlässigung von \dot{g} jedoch plausibel. Bevor aus der Gleichung (2.10) die Funktion $a(t)$ berechnet werden kann, sind zunächst noch die innere und äußere Feldstärke als Funktion der Zeit und des Radius zu bestimmen.

2.2 Die Gleichung für das innere und für das äußere Magnetfeld.

Die Gleichung für das innere Magnetfeld.

Die Voraussetzung in 1.1 über die elektrische Leitfähigkeit wird im folgenden beibehalten werden, mit der gleichen Begründung wie dort: Während der Dauer des Kompressionsvorganges kann die Magnetfeld-diffusion vernachlässigt, der magnetische Fluß durch den von der hochleitenden Grenzschrift des Plasmazylinders umrandeten Querschnitt als konstant angenommen werden. Für die Berechnung der Feldstärke des inneren Magnetfeldes ist dann nur noch die Kenntnis des räumlichen Verlaufs dieser Feldstärke erforderlich. Wenn das Plasma im Innern schwachleitend oder überhaupt das von der Grenzschrift eingeschlossene Volumen aus Neutralgas besteht, also nur kleine Stromdichten auftreten können, ist das Magnetfeld im Innern nahezu homogen, und die Voraussetzung der Flußkonstanz gibt im Idealfall verschwindender innerer Ströme

$$(2.11) \quad B_i = B_0 \left(\frac{a_0}{a} \right)^2$$

worin B_0 die Magnetfeldstärke im Plasma vor dem Einsatz der Kompression bezeichnet. Wegen der Eigenschaft (2.11) bezeichnet man das innere Magnetfeld als eingeschlossen. Der gleiche Ausdruck gilt auch dann, wenn sich im Innern ein hochleitendes Plasma befindet, wobei

jedoch eine bestimmte Voraussetzung für das Strömungsfeld zu treffen ist. Damit das Magnetfeld von Null verschieden und homogen ist, muß bei hoher Leitfähigkeit notwendig überall im Plasma die lokale Strömungsgeschwindigkeit $v_r \neq 0$ und überdies proportional zum Abstand der betrachteten Stelle von der Achse des Plasmazylinders sein. Die Vorstellung einer Grenzschicht, die sich in ein ruhendes Plasma hineinbewegt, ist dann nicht länger haltbar; wie das Modell dann abzuändern ist, wird im 3. Abschnitt diskutiert werden.

Die Gleichung für das äußere Magnetfeld bei eingeschlossenem inneren Magnetfeld.

Die Stromgleichung für den Kompressionsvorgang mit innerem Magnetfeld gilt wieder in der Form

$$(2.12) \quad \frac{d}{dt} (LI) = U_0 - \frac{1}{C} \int_0^t I dt,$$

worin U_0 zunächst wieder die Ladespannung des Kondensators und der Zeitpunkt $t = 0$ den Einsatz der Entladung bezeichnen möge. In (2.12) hat L die gleiche Bedeutung wie früher, da der Fluß des inneren Feldes wegen der vorausgesetzten Konstanz keinen Beitrag zur Flußänderung liefert. Je nach den Versuchsbedingungen sind zwei Fälle zu unterscheiden:

I. Zu Beginn der Batterieentladung sei das im Entladungsrrohr befindliche Gas überall nicht oder nur schwach leitend. Dann kann das Magnetfeld ungehindert eindringen, und es herrschen daher die gleichen Verhältnisse wie bei einem völlig evakuierten Entladungsrrohr. Die Spuleninduktivität besitzt in diesem Fall den für eine Spule im Vakuum geltenden Wert, und das Magnetfeld wird in Abhängigkeit von der Zeit

$$(2.13) \quad B = \frac{\mu_0 U_0}{\ell} \sqrt{\frac{C}{L_a + L_s}} \sin \omega t, \quad \omega^{-2} = C(L_a + L_s)$$

Zur Zeit t_0 erfolge dann der Durchschlag des Gases. Da die induzierte elektrische Feldstärke bei homogenem Magnetfeld linear mit dem Abstand von der Spulenachse geht, sei angenommen, daß die Zündung in einem schmalen Ringgebiet am Rande des Entladungsrohres erfolgt.

II. Im zweiten Fall sei eine stark ionisierte und hochleitende Randschicht des Plasmas zu Beginn der Kondensatorentladung bereits vorhanden. Dieser Fall ist verwirklicht, wenn entweder vor dem Einschalten der Kondensatorbatterie das Gas bereits durch eine induktive Hochfrequenzentladung vorgeheizt ist, oder aber die Kompression in der zweiten Halbwelle der Entladung betrachtet wird, bei der ebenfalls ein hochleitendes Plasma ausgebildet und ein inneres Magnetfeld von der vorausgehenden Phase her im Plasma vorhanden ist. Sei B_0 die Stärke dieses inneren Feldes, so benötigt die Kondensatorbatterie bis zur Erreichung des Druckgleichgewichts von äußerem und innerem Magnetfeld die Zeit $t_0 = B_0 \ell a / \mu_0 U_0$. Statt der Induktivität $L_a + L_s$ ist jetzt nur L_a für den Vorgang bestimmend, da das Plasmaminnere keinen Beitrag zur Flußänderung liefert, wenn noch vorausgesetzt wird, daß das Plasma zu Beginn der Kompression das ganze Spuleninnere ausfüllt, der Plasmaradius daher gleich dem Innenradius a_0 des Entladungsrohres ist.

In beiden Fällen ist die Induktivität des Kreises bis zum Einsatz der Kompression zeitlich konstant. Für $t \geq t_0$ hingegen wird sie veränderlich. Wenn sich die Spannung an der Kondensatorbatterie während des mit $t = t_0$ beginnenden Kompressionsvorganges nicht merklich ändert, wird die Lösung für den Strom in beiden Fällen

$$(2.14) \quad I = \frac{U(t_0)(t-t_0) + I_0 L(t_0)}{L_a [1 + \lambda(1 - \gamma^2)]} \quad ,$$

worin $U(t_0)$ und $L(t_0)$ Spannung und Induktivität zu Beginn der Kompression bezeichnen. Nach Einführung der Feldstärken

$$(2.15) \quad \hat{B} = \frac{\mu_0 U_0 t_0}{\ell l a} \quad , \quad B_0 = \frac{\mu_0 I_0}{\ell}$$

und der Zeit vom Beginn der Kompression bis zum Zeitpunkt t in Einheiten t_c wird Gleichung (2.14)

$$(2.14a) \quad B = \frac{\hat{B}}{1 + \lambda(1 - \gamma^2)} \left(\tau + \frac{B_0}{\hat{B}} \frac{L(t_0)}{L_a} \right)$$

Darin ist bereits $U(t_0) = U_0$ angenommen. Den Quotienten B_0 / \hat{B} bezeichnen wir im folgenden mit β :

$$(2.16) \quad \beta = B_0 / \hat{B}$$

Da uns hauptsächlich der Fall II eines durch Hochfrequenzheizung vorionisierten Plasmas interessiert, für den im Idealfall $L(t_0) = L_a$ wegen Abschirmung des Inneren vom äußeren Magnetfeld gilt, wird der Ausdruck für das äußere Magnetfeld

$$(2.17) \quad \frac{B}{\hat{B}} = \frac{\beta + \tau}{1 + \lambda(1 - \gamma^2)}$$

Für den Quotienten B / \hat{B} werden wir b schreiben. Der Fall I ist in (2.17) enthalten; man hat bei der Übertragung der für den Fall II berechneten Ergebnisse auf den Fall I zu beachten, daß bei vollständigem Eindringen des Magnetfeldes in das Plasma bis zum Zeitpunkt des Beginns der Kompression $L(t_0) = L_a(1 + \lambda)$ ist und daher in Gleichung (2.17) an Stelle von β jetzt $\beta(1 + \lambda)$ steht. Im Fall I hat β daher die Bedeutung $B_0 = \hat{B} \beta / (1 + \lambda)$.

Verschiedene Bedeutungen des Parameters β .

β ist in Gleichung (2.16) zunächst nur als Rechengröße eingeführt, als Abkürzung für den Quotienten aus der Stärke des anfangs eingeschlossenen Magnetfeldes zu einer Feldstärke \hat{B} , welche bei konstanter Batteriespannung U_0 nach der Zeit t_c im Außenraum des Plasmas erreicht würde, wenn das Innere entsprechend dem Fall II vollständig abgeschirmt ist.

Mit dem Ausdruck für B_0 wird sofort $\beta = t_0/t_c$. Daher ist β auch das Verhältnis der Zeit t_0 von Beginn der Batterieentladung bis zum Erreichen des Druckgleichgewichtes zur Kompressionszeit t_c .

Zwei weitere Bedeutungen von β ergeben sich, wenn man die Definition t_c durch Gleichung (1.15) benutzt. Man findet nach Einsetzen für \hat{B} in (2.16) und Erweiterung des Quotienten mit t_c/a_0

$$\beta = \frac{B_0}{2(\mu_0 \rho_0)^{1/2}} \frac{t_c}{a_0}$$

Darin ist $B_0 / (\mu_0 \rho_0)^{1/2} = v_A$ die Alfvén-Geschwindigkeit, d.i. die Fortpflanzungsgeschwindigkeit einer transversalen magneto-hydrodynamischen Welle in einem Plasma der Dichte ρ_0 in einem Magnetfeld B_0 ; und

$$t_A = 2 a_0 (\mu_0 \rho_0)^{1/2} / B_0$$

entsprechend die Laufzeit t_A einer solchen Welle über den Durchmesser des Entladungsrohres. β ist daher das Verhältnis der Kompressionszeit t_c zu dieser Laufzeit t_A . Kleines β deutet auf dynamische Vorgänge hin, die schnell im Vergleich zum Ausbreitungsvorgang der Alfvén-Welle verlaufen.

Definiert man andererseits $2 a_0/t_c$ als eine mittlere, den Kompressionsvorgang kennzeichnende Kompressionsgeschwindigkeit v_c und bezieht diese auf die Alfvén-Geschwindigkeit v_A , womit entsprechend dem hydrodynamischen Fall eine magneto-hydrodynamische Machzahl des Vorgangs definiert ist

$$M_A = \frac{v_c}{v_A},$$

so wird β gleich der reziproken Machzahl des Kompressionsvorganges. Daß in den Ausdrücken der Faktor 2 beim Radius erscheint, und daher der Durchmesser an Stelle des Radius als Bezugsgröße auftritt, muß als eine gewisse Inkonsequenz betrachtet werden, die sich jedoch beheben ließe, wenn man t_c anders, nämlich durch den halben Wert definierte, was an sich auch durch die folgende Gleichung (2.19) nahegelegt wird.

Noch muß betont werden, daß die Bedeutung von β hier nicht zusammenfällt mit der in der Plasmaphysik vielfach üblichen Bedeutung als Quotient aus kinetischem und magnetischem Druck, der hier mit $\tilde{\beta}$ bezeichnet werden möge:

$$(2.18) \quad \tilde{\beta} = \frac{2\mu_0 n k T}{B^2}$$

Im Schneepflug-Modell ist zunächst kein kinetischer Druck und damit auch keine thermische Energie definiert, wohl aber läßt sich an deren Stelle eine Dichte der gerichteten kinetischen Energie definieren, etwa $\rho_0 v_c^2/2$. Benutzt man diese an Stelle der thermischen Energiedichte zur Definition von $\tilde{\beta}$, so zeigt (2.18) daß zwischen $\tilde{\beta}$, β und M_A der Zusammenhang besteht $\tilde{\beta} = \beta^{-2} = M_A^2$.

2.3 Die numerische Integration der Bewegungsgleichung.

Mit den in Gleichung (2.2) angegebenen Ausdrücken für das innere und äußere Magnetfeld wird die Bewegungsgleichung für das Schneepflug-Modell der Kompression eines Plasmas mit eingeschlossenem Magnetfeld in dimensionsloser Schreibweise

$$(2.19) \quad \frac{d}{d\tau} \left[(1-\gamma^2) \frac{d\gamma}{d\tau} \right] + 4\gamma \left[\frac{\beta + \tau}{1 + \lambda(1-\gamma^2)} \right]^2 - 4 \frac{\beta^2}{\gamma^3} = 0.$$

Darin ist der Faktor 4 in den beiden letzten Termen lediglich des leichteren Vergleichs wegen mit voraufgegangenen Rechnungen im free-particle-Modell beibehalten worden, wodurch t_c und damit τ die gleiche Bedeutung wie früher haben. Dieser Faktor ließe sich durch Wahl einer halb so großen Zeiteinheit an Stelle von t_c fortschaffen, was aber hier nicht geschehen soll. Entsprechend der Bemerkung in 1.3 ist zur (2.19) festzustellen, daß nach dem Schneepflug-Modell Kompressionsvorgänge

mit innerem Magnetfeld nur dann ähnlich verlaufen, wenn neben λ auch β den gleichen Wert besitzt. Vom hydrodynamischen Gesichtspunkt her gesehen ist dies verständlich, da β durch die Machzahl des Vorganges gegeben ist.

Eine analytische Lösungsmöglichkeit der Gleichung (2.19) scheint nicht gegeben. Beim Versuch jedoch, die Differentialgleichung (2.19) nach einem der üblichen Verfahren - es wurde schließlich das Taylor-Verfahren benutzt, - ergibt sich jedoch folgende Schwierigkeit. Für die Anwendung des Verfahrens ist die Kenntnis der zweiten Ableitung im Anfangspunkt erforderlich. Es zeigt sich zunächst, daß mit den Anfangsbedingungen $y = 1$, $y' = 0$ für $\tau = 0$ die zweite Ableitung unbestimmt ist. Man hat nämlich

$$(2.19a) \quad y'' = \frac{2y}{1-y^2} \left\{ y'^2 + 2 \frac{\beta^2}{y^4} - 2 \left[\frac{\beta + \tau}{1 + \lambda(1-y^2)} \right]^2 \right\}$$

Die Anwendung der Hospitalschen Regel auf den rechts stehenden Ausdruck liefert $y''(0) = -\infty$. Damit schien auch eine numerische Integration ausgeschlossen, da ein solcher Anfangswert bei der digitalen Berechnung nicht vorgebar ist.

Unabhängig von dieser Seite des Problems bestand zudem die Schwierigkeit, daß y'' eine Beschleunigung bezeichnet und daher unendlich großes $|y''|$ physikalisch sinnlos ist. Die Bewegung der Grenzschicht besteht in einer Verschiebung von Teilchen endlicher Masse, deren Beschleunigung daher notwendig einen endlichen Wert besitzen muß. Man kann also nicht die Anfangsmasse der Grenzschicht, wie es im Modell geschieht, gleich 0 setzen, sondern muß eine anfängliche endliche Masse für die Grenzschicht annehmen, welche dann im Nenner von (2.19a) als ein additiver Term erscheinen und damit die Singularität von y'' aufheben würde, indem jetzt sogar $y''(0) = 0$ erschiene. Es entsteht die Frage, den Betrag dieser Masse zu bestimmen, wobei klar war, daß er nicht aus dem vorliegenden Modell bestimmbar ist. Statt aber eine Abänderung des Modells zu versuchen, kann man sich mit der Überlegung behelfen,

daß der Beitrag dieser Masse im Nenner klein gegenüber 1 ist, da diese Zahl für die ganze je Längeneinheit des Plasmazylinders enthaltene Masse steht, und die Anfangsmasse, verglichen mit der gesamten Masse, sicher sehr klein ist, etwa ϵ mit $\epsilon \ll 1$. Dann folgt sofort, daß diese Anfangsmasse auf den Vorgang keinen wesentlichen Einfluß mehr haben kann, sobald $1 - y^2 > \epsilon$ gilt. Das ist nach $y \approx 1 - \epsilon/2$ der Fall, also bei kleinen ϵ nahe bei $y = 1$, so daß dann wieder die Gleichung in der Form (2.19a) gilt, also wieder das bisherige Modell zutreffend ist.

Die Lösung der Differentialgleichung (2.19) .

Ein Ausweg aus der mit der Singularität im Anfangspunkt verbundenen Schwierigkeit ergab sich erst, nachdem eine Näherungslösung der Gleichung (2.19) für den Anfang der Bewegung gefunden war. Setzt man

$$y = 1 - \eta \quad , \quad \text{mit } \eta \ll 1,$$

so ergibt sich bei Vernachlässigung von quadratischen Termen in η zunächst

$$(2.20) \quad \frac{d^2 \eta^2}{d\tau^2} = 4(1-\eta) \left[\left(\frac{\beta + \tau}{1 + 2\lambda\eta} \right)^2 - \frac{\beta^2}{1-4\eta} \right] ,$$

und falls noch $4\lambda\eta \ll 1$, was für große $\lambda > 1$ erst recht $\eta \ll 1$ nach sich zieht,

$$(2.21) \quad \frac{d^2 \eta^2}{d\tau^2} = 8\beta\tau + 4\tau^2$$

Sei jetzt außerdem noch $\tau \ll \beta$, dann gilt näherungsweise

$$(2.22) \quad \frac{d^2 \eta^2}{d\tau^2} = 8\beta\tau$$

Gleichung (2.22) läßt sich unmittelbar integrieren und liefert mit den Anfangsbedingungen für η schließlich

$$(2.23) \quad \eta = \frac{2}{3} \sqrt{3\beta} \tau^{3/2}$$

Damit ergibt sich als Näherungslösung von (2.19)

$$(2.24) \quad \gamma = 1 - \frac{2}{3} \sqrt{3\beta} \tau^{3/2}$$

Die Bedingung $4\lambda\eta \ll 1$, die Voraussetzung für die Gültigkeit von Gleichung (2.24) ist, bedeutet mit Einsetzen von (2.23)

$$(2.25) \quad \frac{8\lambda}{3} \sqrt{3\beta} \tau^{3/2} \ll 1$$

Wegen $\tau \ll \beta$ ist

$$4\lambda\eta \ll \frac{8\lambda}{\sqrt{3}} \beta^2,$$

und die Forderung (2.25) ist sicher erfüllt, wenn gilt $\lambda\beta^2 \lesssim 1$

Setzt man $\tau/\beta = \epsilon$, so wird $4\lambda\eta \approx 5\lambda\beta^2 \epsilon^{3/2}$, und man erkennt, wie durch geeignete Wahl von ϵ für jeden Wert von $\lambda\beta^2$ zu erreichen ist, daß die Bedingung $4\lambda\eta \ll 1$ erfüllt wird; man hat

$$(2.26) \quad \epsilon \ll (5\lambda\beta^2)^{-2/3}$$

zu wählen. Die Bedingung $\tau \ll \beta$ für τ ist aber wegen der Kleinheit von β meist einschneidender als (2.26).

Man erkennt jetzt auch, von welcher Art die Singularität im Anfangspunkt der Bewegung ist, nämlich

$$\gamma'' \sim -\tau^{-1/2}$$

wogegen $\gamma' \sim -\tau^{1/2}$, und ferner, daß alle Ableitungen an der Stelle $\tau = 0$, $\gamma = 1$ divergieren, weshalb eine Reihenentwicklung dort nicht möglich ist.

Der weitere Gang der Rechnung ergibt sich jetzt ohne Schwierigkeiten. Mit der Näherungslösung (2.24) wird ein regulärer Punkt in der Nähe des singulären Punktes $y = 1$ aufgesucht und in diesem als Entwicklungspunkt eine Taylor-Entwicklung vorgenommen, da außerhalb $\tau = 0$ die Differentialgleichung wieder analytisch ist:

$$(2.27) \quad y_1 = y_0 + y_0' h + \frac{1}{2} y_0'' h^2 + \frac{1}{6} y_0''' h^3 + \dots$$

Darin können die höheren Ableitungen wegen Proportionalität mit τ_0^{-k} noch sehr groß werden. Einsetzen für y_1 liefert

$$(2.28a) \quad y_1 = 1 - \sqrt{3\beta} \tau_0^{3/2} \left(\frac{2}{3} + \frac{h}{\tau_0} + \frac{1}{4} \frac{h^2}{\tau_0^2} - \frac{1}{4 \cdot 6} \frac{h^3}{\tau_0^3} + \dots \right)$$

und entsprechend für y_1'

$$(2.28b) \quad y_1' = -\sqrt{3\beta} \tau_0^{1/2} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{h}{\tau_0} + \frac{1}{8} \frac{h^2}{\tau_0^2} + \dots \right)$$

Da die Taylor-Entwicklung (2.28a, b) um den Punkt τ_0 nur in einem Kreis konvergiert, der den im Abstand τ_0 vom Entwicklungspunkt liegenden singulären Punkt $\tau = 0$ nicht einschließt, so muß der Radius h dieses Kreises kleiner als τ_0 sein. Wenn daher $h/\tau_0 \leq q < 1$, konvergieren die Reihen (2.28a, b), und der Fehler bei Abbruch der Entwicklung ist kleiner als das erste vernachlässigte Glied. Andererseits muß für die Anwendbarkeit der Näherungslösung der Entwicklungspunkt τ_0 noch innerhalb des Gültigkeitsbereiches der Näherungslösung fallen. Damit besteht für h die Forderung $h \ll \tau_0 \ll \beta$.

Hat man sich durch schrittweise Berechnung von dem anfänglichen Entwicklungspunkt τ_0 entfernt, so kann man die Rechenschrittweite h erhöhen, da der Konvergenzradius mit jedem weiteren berechneten Punkt größer wird. Dadurch lassen sich die Häufungsfehler herabsetzen, und die Rechenzeit läßt sich verkürzen. Bei der Durchführung der Rechnung wurde, da

keine β -Werte kleiner als 10^{-4} untersucht wurden, $\tau_0 = 10^{-6}$ gewählt, wodurch ungünstigenfalls immer noch $\tau < 10^{-2} \beta$ erfüllt war. Die Schrittweite wurde in diesem Punkt zu $h = 10^{-8}$ gewählt, wodurch $h/\tau_0 = 10^{-2}$, was sich für gute Konvergenz des Verfahrens als ausreichend erwies.

Ein weiteres Lösungsverfahren für die Differentialgleichung (2.19).

Es wurde noch eine andere Möglichkeit gefunden, die mit der Singularität im Anfangspunkt verbundene Schwierigkeit bei der numerischen Integration der Differentialgleichung (2.19) zu umgehen. Statt den in (2.19) links auftretenden Differentialausdruck auszdifferenzieren, um eine explizite Darstellung für die bei dem Integrationsverfahren benötigte zweite Ableitung von y zu gewinnen, kann man durch Einführung einer neuen Variablen $z(y)$ mittels

$$(2.29) \quad \frac{dz}{dt} = (1 - y^2) \frac{dy}{dt}$$

eine Differentialgleichung für $z(\tau)$ aufsteller

$$(2.30) \quad \frac{d^2 z}{dt^2} = -4y \left\{ \left[\frac{\beta + \tau}{1 + \lambda(1 - y^2)} \right]^2 - \frac{\beta^2}{y^4} \right\},$$

welche die Eigenschaft hat, daß die zweite Ableitung im Anfangspunkt jetzt durch einen regulären Ausdruck dargestellt wird: $z''(0) = 0$, und für die daher die mit der Gleichung (2.19a) verbundene Schwierigkeit nicht auftritt. In dem in (2.30) rechts stehenden Ausdruck ist y als Funktion von z einzusetzen. Gerade darin liegt aber die mit dieser Substitution neu auftauchende Schwierigkeit begründet, da $y(z)$ als Wurzel der Gleichung $f(y, z) = y^3 - 3y + 3z = 0$ mit der Eigenschaft $0 < y < 1$, ein nicht explizit darstellbarer Ausdruck ist. Auch zeigt sich, daß im Anfangspunkt $y = 1$, wo die genaue Kenntnis $y(z)$ besonders wichtig ist, die Berechnung mittels Näherungsverfahren schwierig und zeitraubend wird, da hier $\partial f / \partial z$ verschwindet. Man kann jedoch ohne Entwicklung von Nullstellensuchprogrammen zu einer Lösung gelangen, wenn man

die Funktion $y(z)$ tabellarisch vorgibt. Dazu wurde die Funktion $z(y)$ beginnend mit $y = 1$, $z = 2/3$ in Abständen von 10^{-3} bis $y = 0$, $z = 0$ berechnet und die Funktionswerte in aufeinanderfolgende Speicherzellen weggespeichert. Jedesmal, wenn das Taylor-Verfahren einen neuen Wert z_{n+1} liefert, wird die Speicherzelle der Tabelle aufgesucht, in der dieser z -Wert enthalten ist, und aus der Adresse der Speicherzelle der y -Wert bestimmt, der für die Berechnung des jeweiligen z -Wertes benutzt wurde. Der so gefundene y -Wert wird dann in den Ausdruck für z'' eingesetzt, wodurch der Anschluß an das übliche Verfahren hergestellt ist.

Die Genauigkeit der Rechnung wird natürlich begrenzt durch den Umfang der Tabelle. Wollte man die Genauigkeit auf vier Stellen erhöhen, so würde man schon 10^4 Speicherzellen benötigen und käme damit an die Grenze der Kapazität des Speichers der benutzten Maschine (12 000 Zellen).

Trotzdem wurde das zweite Verfahren ebenfalls durchgeführt, allerdings mit einer vom ersten Verfahren unabhängigen Lösungsmethode für die Differentialgleichung, um eine vom ersten Verfahren unabhängige Bestätigung der Lösungskurven zu erhalten. Diese zweite Methode bestand in der iterativen Berechnung der Funktionswerte mittels der Simpsonschen Regel. Die Iteration wurde solange durchgeführt, bis der Unterschied zweier aufeinanderfolgender Näherungen kleiner als eine obere Genauigkeitsschranke $\delta = |z''^{(k+1)}_n - z''^{(k)}_n|$ war, wobei $\delta = 10^{-3}$ gewählt wurde, da die Forderung einer größeren Genauigkeit wegen der auf drei Stellen begrenzten Genauigkeit der Tabelle sinnlos ist.

Der Vergleich beider Methoden wurde an einer Reihe von Parameterkombinationen durchgeführt. Tabelle 1 enthält als Beispiel die Ergebnisse für $\lambda = 5$, $\beta = 0, 1$ und $0, 01$. Bis zur Nähe des Kompressionsmaximums stimmen die Werte durchweg überein. Für die Werte nach dem Kompressionsmaximum ergeben sich aber bereits Abweichungen, die nicht mehr innerhalb sinnvoller Schranken liegen. Es ist jedoch zu vermuten, daß die Abweichungen durch größere Ungenauigkeit des zweiten Verfahrens bedingt sind. Diese Vermutung wird nahegelegt durch die Tatsache, daß für gewisse Parameterwerte die Genauigkeitsgrenze von $\delta = 10^{-3}$ in der

Nähe des Kompressionsmaximums nicht mehr unterschritten wird, wodurch die Maschine nicht mehr aus dem Iterationszyklus herausgelangt und fortgesetzt den Funktionswert an der gleichen Stelle berechnet, so daß das zweite Verfahren in diesen Fällen für die Berechnung des weiteren Lösungsverlaufs versagt. Überdies erwies sich das zweite Verfahren als langsamer als das erste. Daher wurde für die eigentliche Rechnung durchweg das erste Verfahren benutzt.

Tabelle 1

τ	$\beta = 0,1$		$\beta = 0,01$	
	y	y	y	y
	1. Verfahren	2. Verfahren	1. Verfahren	2. Verfahren
0,0	1,000	0,999	1,000	0,999
0,2	0,9664	0,966	0,9769	0,977
0,4	0,9095	0,909	0,9251	0,925
0,6	0,8444	0,844	0,8604	0,860
0,8	0,7760	0,776	0,7893	0,789
1,0	0,7066	0,707	0,7143	0,714
1,2	0,6376	0,638	0,6364	0,636
1,4	0,5706	0,571	0,5561	0,556
1,6	0,5077	0,508	0,4737	0,474
1,8	0,4519	0,452	0,3894	0,389
2,0	0,4076	0,408	0,3032	0,303
2,2	0,3798	0,381	0,2158	0,216
2,4	0,3726	0,373	0,1285	0,129
2,6	0,3854	0,386	0,0516	0,053
2,8	0,4123	0,412	0,0783	0,076
3,0			0,1687	0,159
3,2			0,2597	0,242
3,4			0,3416	0,318

2.4 Ergebnisse. Die Energie des Plasmas.

Der Verlauf der Lösungskurven.

Typische Beispiele für den Verlauf der Lösungskurven enthalten die Abbildungen 3 und 4, die den Radius als Funktion der Zeit in Abhängigkeit vom Anfangswert des inneren Magnetfeldes für die beiden Induktivitätsverhältnisse $\lambda = 5$ und $\lambda = 10$ darstellen. Man sieht, daß für $\lambda = 5$ der Radius bei β -Werten oberhalb 0,1 im Mittel nicht kleiner als $y = 0,4$; für $\lambda = 10$ bei den gleichen β -Werten im Mittel nicht kleiner als 0,5 wird. Bei solchen β -Werten ist daher die Kompression des Plasmas durch das eingeschlossene innere Magnetfeld stark behindert, und auch die Energieaufnahme des Plasmas erweist sich nach den Ergebnissen der Rechnungen des nächsten Abschnittes als sehr gering. Die Bewegung erfolgt nahezu mit Druckgleichgewicht zwischen innerem und äußerem Magnetfeld. Bei kleinen β -Werten ist der Einfluß des inneren Magnetfeldes auf die Bewegung anfangs gering; infolgedessen fallen die Kurven für den Radius bei verschiedenen β -Werten bis auf geringe Abweichungen zunächst zusammen. Größere Abweichungen ergeben sich nur bei kleinen Radien, weil erst für diese das innere Magnetfeld infolge des durch die Kompression erhöhten Wertes wirksam wird. Die zweite Ableitung wird dann positiv und y'' schließlich Null. Dies ist umso später, bei umso kleineren Radien der Fall, je kleiner die Magnetfeldstärke anfangs war. Die an das Kompressionsmaximum anschließende Expansion erfolgt umso rascher, je kleiner der Minimalradius ist, da der Überdruck des inneren Magnetfeldes gegenüber dem äußeren Magnetfeld, das in der Nähe des Kompressionsmaximums nahezu stationär ist, mit kleiner werdendem Minimalradius zunimmt. Die Extrapolation der Kurven nach $y = 0$ für die jeweils kleinsten β -Werte, die bis in die Nähe des Kompressionsmaximums den magnetfeldfreien Fall approximieren, ergibt als Zeit bis zum ersten Kompressionsmaximum für $\lambda = 5$ rund $\tau = 2,7$ und für $\lambda = 10$ nahezu $\tau = 3,5$. Im free-particle Modell würden sich für dieselben λ -Werte

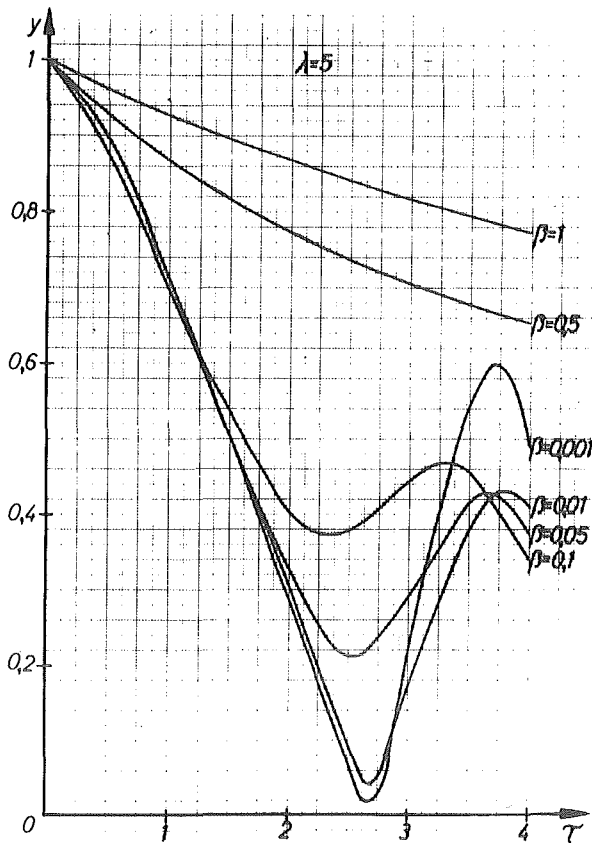


Abb. 3

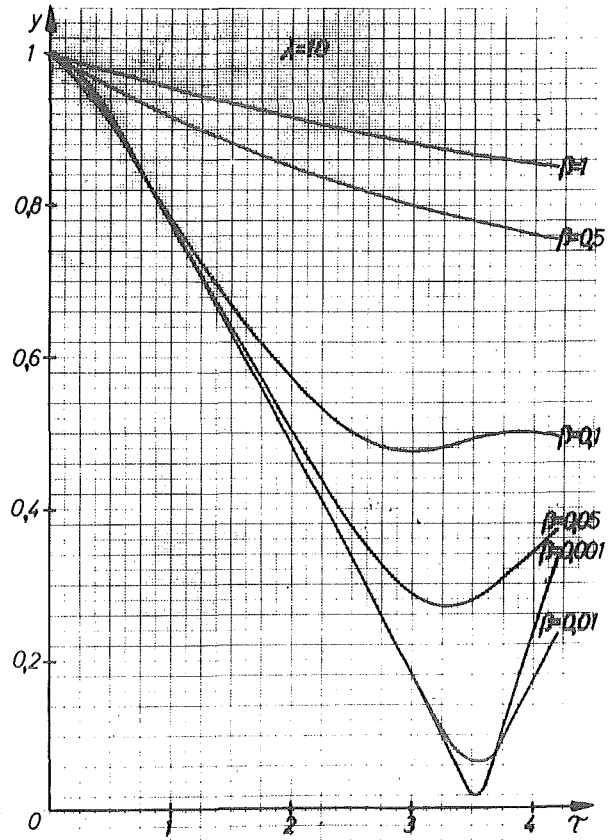


Abb. 4

Der Radius des Plasmazylinders nach dem Schneeflug-Modell bei verschiedenen β -Werten des eingeschlossenen Magnetfeldes für die Induktivitätsverhältnisse $\lambda = 5$ (Abb. 3) und $\lambda = 10$ (Abb. 4).

nach Formel (1.18) $\tau_c = 2,95$ und $\tau_c = 3,91$ ergeben.

In den beiden Abbildungen 5 und 6 ist der Verlauf der Anstiegsrate des inneren und des äußeren Magnetfeldes für den Fall $\lambda = 1$ dargestellt. Des leichteren Vergleichs wegen ist der Radius mit eingetragen; die Kompressionszeit im magnetfeldfreien Fall würde nach dem free-particle Modell $\tau_c = 1,8$ betragen. Man erkennt, daß bis zu Radien $y = 0,5$ die Zunahme des äußeren Magnetfeldes stark abfällt, das Magnetfeld für mittlere Radien nahezu stationär wird und erst dann wieder mit zunehmender Anstiegsrate ansteigt. Das innere Magnetfeld ist unter den

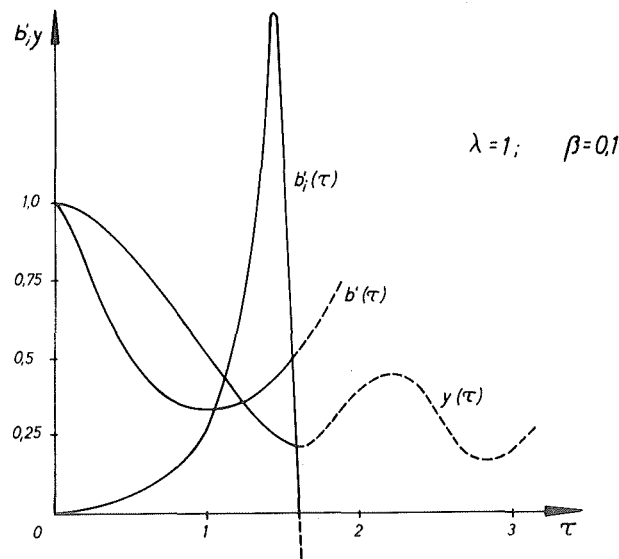


Abb. 5

Plasmaradius y und Anstiegsraten des äußeren (b) und des inneren Magnetfeldes (b_i) nach dem Schneepflug-Modell für ein inneres Magnetfeld mit $\beta = 0,1$ bei einem Induktivitätsverhältnis $\lambda = 1$.

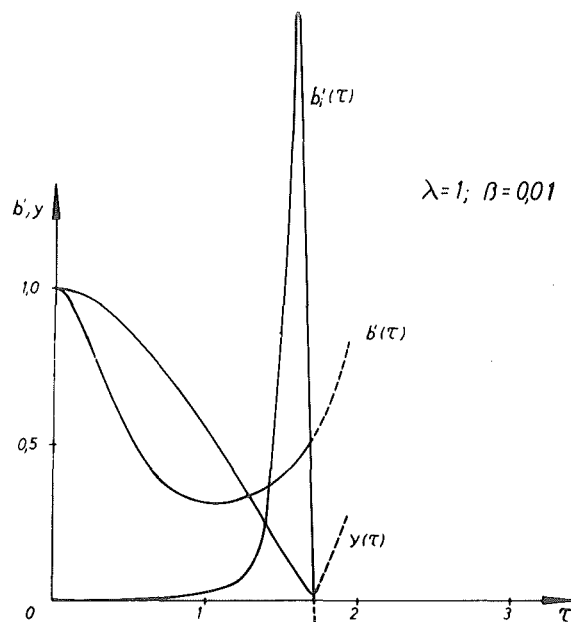


Abb. 6

Die gleichen Größen wie in Abb. 5 für ein inneres Magnetfeld mit $\beta = 0,01$ bei dem gleichen Induktivitätsverhältnis wie oben.

gleichen Verhältnissen bis zu $y = 0,5$ dagegen nahezu konstant, nimmt dann aber stark bis zum Kompressionsmaximum zu und wird im Kompressionsmaximum selbst stationär. Bei der anschließenden Expansion nimmt das Magnetfeld schließlich wieder ab, weshalb hier b_1^r negativ wird. Bei $\beta = 0,01$ steigt das innere Magnetfeld erst in der Nähe des Kompressionsmaximums rasch an. Durchweg fällt bei kleineren bis mittleren β -Werten das Auftreten der Spannungsspitzen proportional zu b_1^r mit dem Kompressionsmaximum zusammen.

Abbildung 7 zeigt schließlich eine Folge von Oszillationen des Plasmazylinders nach dem Schneepflug-Modell für den Fall $\lambda = 5$, $\beta = 0,05$. Die Amplitude der Schwingungen nimmt zunächst ab, ist aber in den letzten drei Schwingungen nahezu konstant. Der Minimalradius nimmt mit jedem weiteren Kompressionsmaximum ab, entsprechend der Zunahme des äußeren Magnetfeldes, und fällt nahezu linear mit der Zeit. Mit der Zunahme des äußeren Magnetfeldes verkürzt sich die Schwingungsdauer; dieses Verhalten ist bereits aus einer linearisierten Theorie des Schwingungsvorgangs zu erwarten, da die Schwingungsfrequenz proportional zur Stärke des äußeren Magnetfeldes zunimmt.

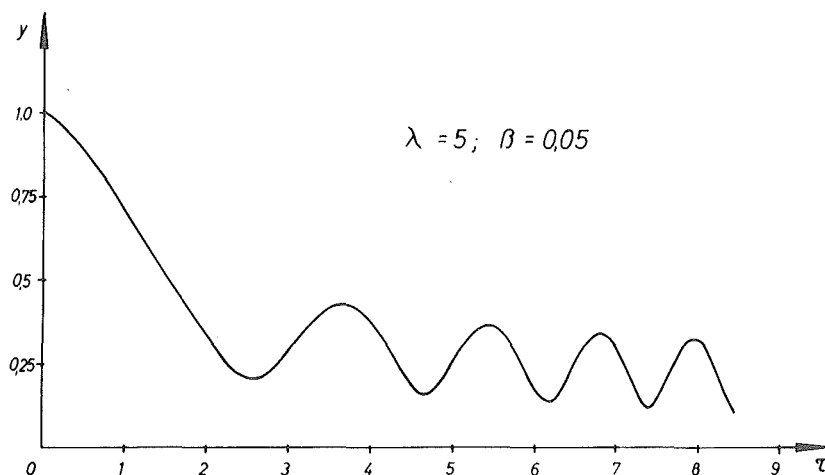


Abb. 7

Radiale Oszillationen des Plasmazylinders nach dem Schneepflug-Modell bei einem inneren Magnetfeld mit $\beta = 0,05$.

Die Energieaufnahme des Plasmas.

Wie Radius oder Geschwindigkeit läßt sich auch die Energie des Plasmas im Schneepflug-Modell im allgemeinen nicht als explizite Funktion der Zeit darstellen. Nur wenn man sich auf die Betrachtung des Anfangs der ersten Kompressionsphase beschränkt und das innere Magnetfeld vernachlässigt, läßt sich ein geschlossener Ausdruck für die kinetische Energie angeben. Die Näherung, welche dieser abzuleitenden Gleichung für die Energie zugrundeliegt, schließt die Annahme einer während der Kompression konstanten Induktivität des Kreises ein, die daher gleich der Anfangsinduktivität ist. Wir setzen daher sofort

$$B_a = B_a t \quad \text{mit} \quad \dot{B}_a = \frac{\mu_0 U_0}{\ell L_a}$$

und erhalten mit $B_i = 0$ die Bewegungsgleichung

$$(2.31) \quad \frac{d}{dt} \left[(1 - \gamma^2) \frac{d\gamma}{dt} \right] = - \frac{\dot{B}_a^2}{\mu_0 \rho_0 a_0^2} \gamma t^2$$

In gleicher Näherung ist von Braginski-Migdal²² die Energie des Plasmas im z-Pinch-Effekt abgeschätzt worden. Setzt man

$$3 \mu_0 \rho_0 a_0^2 \dot{B}_a^2 = B_1^4 \quad ,$$

so wird unter der Voraussetzung $1 - \gamma \ll 1$ die Lösung

$$(2.32) \quad \gamma = 1 - \frac{1}{2} \frac{B_a^2}{B_1^2}$$

Man erkennt, daß wegen $1 - \gamma \sim t^2$ die zweite Ableitung von γ für das Schneepflug-Modell ohne inneres Magnetfeld im Anfangspunkt $\gamma = 0$ eine Konstante ist, wodurch die bei $B_i \neq 0$ auftretenden Schwierigkeiten entfallen.

Die Arbeit, die am Plasma während der Kompression geleistet wird, ist je Längeneinheit des Plasmazylinders nach 1.3 wieder

$$(2.33) \quad W_{pl} = 2\pi \int_a^{a_0} a \frac{B_a^2}{2\mu_0} da \quad ,$$

woraus nach Einsetzen für B_a^2 aus (2.32) und Integration in derselben Näherung wie bisher folgt

$$W_{pl} = 2\pi\alpha_0^2 \frac{B_1^2}{2\mu_0} (1 - \gamma^2)$$

und mit dem ursprünglichen Ausdruck für B_1

$$(2.34) \quad W_{pl} = \frac{\pi a_0}{4\mu_0} \left(\frac{\mu_0 U_0}{\ell L_a} \right)^3 \frac{t^4}{\sqrt{3\mu_0 \rho_0}}$$

Da die Masse mit t^2 und die Geschwindigkeit mit t wächst, nimmt daher W_{pl} zunächst mit der vierten Potenz von t zu.

Dividiert man die Energie des Plasmas ähnlich wie in (1.3) durch die Zahl der in der Grenzschrift enthaltenen Teilchen und bezeichnet die Teilchenenergie wieder durch die entsprechende Temperatur, so kommt mit B in Gauß und daher hier vorübergehend durch H bezeichnet,

$$(2.35) \quad T = \frac{\pi (\dot{H} t)^2}{10^9 m_0 K}, \quad K = 1,38 \cdot 10^{-16} \text{ erg/}^\circ K$$

für die Temperatur der Ionen in einem magnetischen Kompressionsexperiment. Der Ausdruck (2.35) wurde ohne Ableitung von Fitch²³ angegeben. Wenn das Plasma am Ende der ersten Kompressionsphase nur mehr wenig Energie aufnimmt, so daß die durch die Näherung (2.35) gegebene Energie nahezu die am Ende dieser Kompressionsphase tatsächlich erreichte Energie darstellt, und wenn die Thermisierung des Plasmas wegen der dann erhöhten Dichte und der damit vergrößerten Anzahl elastischer Stöße nahezu abgeschlossen ist, besitzt der Ausdruck (2.35) für die Temperatur einige Relevanz. Es zeigt sich, daß die so berechnete Temperatur in experimentell realisierten Fällen um Größenordnungen höher als die bei einer adiabaten Kompression des Plasmas im Druckgleichgewicht mit dem äußeren Magnetfeld auftretenden Temperatur ist.

Auch für $B_i \neq 0$ lassen sich noch geschlossene Näherungsformeln für die

Plasmaenergie angeben, die aber zumal für kleine β in der Anwendung auf kleine Zeiten begrenzt sind. Wir betrachten daher den Fall $B_i \neq 0$ gleich allgemein. Setzt man in den allgemeinen Ausdruck (2.33) für B_a aus der Bewegungsgleichung (2.10) ein, so ergibt sich mit Gleichung (2.11) nach elementarer Integration für die Arbeitsleistung des äußeren Magnetfeldes

$$(2.36) \quad W_{pl} = \pi a_o^2 \frac{B_o^2}{2\mu_o} \left[\left(\frac{a_o}{a} \right)^2 - 1 \right] + \pi \rho_o a_o^4 \int_0^t \frac{d}{dt} \left[(1 - \gamma^2) \frac{d\gamma}{dt} \right] \dot{\gamma} dt$$

Der erste Anteil in (2.36) stellt offenbar die Arbeit dar, die bei der Kompression des inneren Magnetfeldes durch das äußere Feld geleistet wird. Die Energie des inneren Magnetfeldes je Längeneinheit ist

$$\pi a^2 \frac{B^2}{2\mu_o} = \pi a_o^2 \frac{B_o^2}{2\mu_o} + \pi a_o^2 \frac{B_o^2}{2\mu_o} \left[\left(\frac{a_o}{a} \right)^2 - 1 \right],$$

der erste Term rechts stellt darin die anfängliche Magnetfeldenergie des Plasmas dar.

Der kinetische Anteil W_{pl}^* der Plasmaenergie ist durch den zweiten Beitrag in (2.36) gegeben

$$(2.37) \quad W_{pl}^* = \pi \rho_o a_o^4 \int_{t=0}^t \dot{\gamma} d(M\dot{\gamma})$$

mit $M = 1 - \gamma^2$.

Für $B_i = 0$ ist dieser Anteil gleich W_{pl} selbst, weshalb bei der vorausgehenden Näherungslösung die kinetische Energie durch W_{pl} bezeichnet wurde.

Offenbar besteht W_{pl}^* nicht allein aus der gerichteten Energie der Masse M : diese ist in Einheiten $\pi a_o^2 \rho_o (a_o t_c^{-1})^2$

$$(2.38) \quad \bar{W}_{pl} = \frac{1}{2} (1 - \gamma^2) \gamma'^2$$

Die tatsächliche kinetische Energie des Plasmas ist demgegenüber, wieder in Einheiten $\pi a_0^2 \rho_0 (a_0 t_c^{-1})^2 \tau$

$$(2.39) \quad W_{pl}^* = W_{pl} + \int_0^\tau \gamma |\gamma'|^3 d\tau$$

Der zweite Anteil $\hat{W}_{pl} = W_{pl}^* - \bar{W}_{pl}$ in (2.39) stellt den Stoßverlust der Teilchen beim Einfang in der Grenzschicht dar. Im Schneepflug-Modell ist der Reflexionsvorgang der Teilchen in der Schicht vollkommen unelastisch, was sich darin äußert, daß nach dem "Stoß" die gerichtete Geschwindigkeit der Teilchen gleich der Geschwindigkeit der Grenzschicht ist. Abb. 8 stellt den Verlauf dieses Anteils für $\lambda = 10$ bei verschiedenen β -Werten dar. Als Einheit auf der Ordinaten-Achse ist wie in den Formeln $\pi a_0^4 \rho_0 t_c^{-2}$ gewählt. Die Kurven für $\beta = 0,01$ und $\beta = 5 \cdot 10^{-3}$ fallen praktisch mit der Kurve für $\beta = 10^{-3}$ zusammen und sind nicht gesondert eingetragen. Die Kurve für $\beta = 0,5$ verläuft in geringem Abstand nahezu parallel zur Abszissen-Achse; bei großen β ist die Energieaufnahme des Plasmas gering.

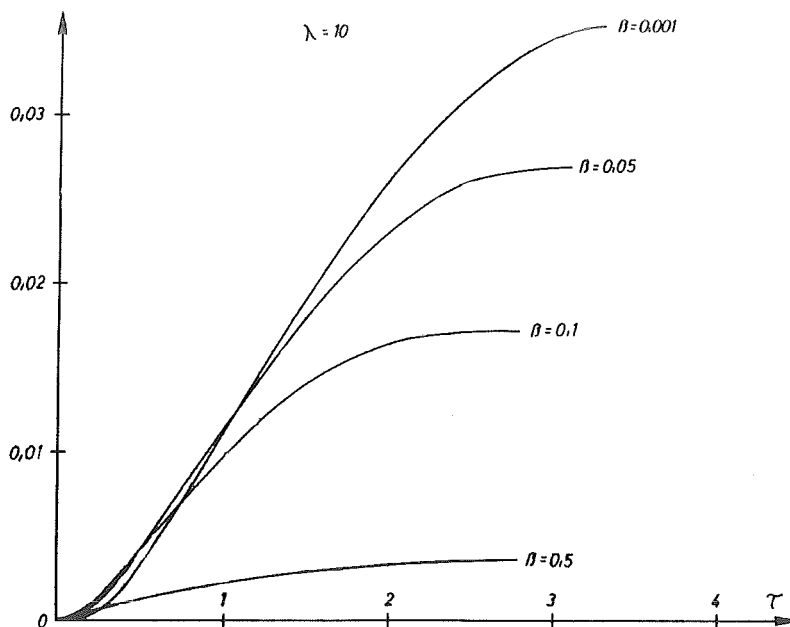


Abb. 8

Die Energie \hat{W}_{pl} des Plasmas nach dem Schneepflug-Modell für verschiedene β -Werte bei einem Induktivitätsverhältnis $\lambda = 10$.

In welche Form die Energie \hat{W}_{pl} im Plasma übergeht, bleibt nach dem Modell offen. Sie kann durch inelastische Stöße der Teilchen mit Neutralgasteilchen, die in die Grenzschrift eingedrungen sind, zu Ionisations- oder anderen Anregungsprozessen verwendet werden; sie kann sich, bei den hohen Dichten in der Grenzschrift, bereits während der Kompression in Temperatur umsetzen oder auch als kinetische Energie der Gyrationbewegung der Teilchen erhalten bleiben. Sie kann aber auch durch Strahlungs- und Teilchenverluste dem Plasma verlorengehen.

Sieht man von solchen Verlusten ab, so stellt dieser zweite Anteil in (2.37) im Maximum der Kompression, d.i. für $y^{\dagger} = 0$, die ganze zu diesem Zeitpunkt im Plasma enthaltene Bewegungsenergie dar. Trägt man die Werte des Integrals zur Zeit des Kompressionsmaximums in Abhängigkeit von λ auf, so liegen diese Werte für gleiche β nahezu auf einer Hyperbel λ^{-1} . Dies legt nahe, die kinetische Energie nicht in Einheiten $\pi a_0^4 \rho_0 t_c^{-2}$ zu rechnen, sondern statt dessen $\pi a_0^4 \rho_0 t_c^{-2} \cdot \lambda^{-1}$ oder in Analogie zur entsprechenden Rechnung im free-particle Modell \hat{E}_{kin} als Energieeinheit zu wählen. Die so gewonnenen Werte $\hat{W}_{pl}/\hat{E}_{kin}$ sind in Tabelle 2 enthalten.

Tabelle 2

$\beta \backslash \lambda$	1	2	3	4	5
0,1	0,229	0,220	0,208	0,206	0,179
0,05	0,267	0,270	0,266	0,262	0,257
0,01	0,286	0,299	0,301	0,297	0,308
0,005	0,291	0,300	0,307	0,310	0,312
0,001	0,292	0,301	0,308	0,311	0,313

Man sieht, daß die kinetische Energie des Plasmas im Kompressionsmaximum nach dem Schneepflug-Modell für verschiedene λ in dem hier untersuchten Bereich nahezu konstant und nur noch von β abhängig ist. Die

Abhängigkeit der Energie \hat{W}_{pl} von λ ist daher im wesentlichen durch \hat{E}_{kin} gegeben. In diesem Fall gelten die Betrachtungen aus 1.3 auch für die Kompression von Plasmen mit innerem Magnetfeld. Die Energien für kleine β -Werte, die den magnetfeldfreien Fall approximieren, sind rd. eine Größenordnung kleiner als die entsprechenden Werte im free-particle Modell. Dieser Unterschied in den Werten der Energie erklärt sich wieder größenordnungsmäßig aus den verschiedenen Geschwindigkeiten, welche die Plasmateilchen nach beiden Modellen nach dem Stoß mit der Grenzschicht annehmen. Unter sonst gleichen Verhältnissen ist für das free-particle Modell der vierfache Wert zu erwarten. Doch bleibt der wesentliche Unterschied, daß es sich beim free-particle Modell primär um gerichtete, im Schneepflug-Modell um thermische oder Gyrationen-Energie handelt.

3. Rechnungen mit einem adiabaten Modell (Osovets-Modell) des Kompressionsvorganges bei eingeschlossenem inneren Magnetfeld.

3.1 Das Osovets-Modell der magnetischen Kompression.

Wie die Beispiele in 2.4 zeigen, oszillieren die Lösungen für den Radius des Plasmazylinders im Schneepflug-Modell, wie durch das Auftreten der zweiten Ableitung von y in Gleichung (2.10) zu erwarten ist. Doch enthält die Gleichung (2.10) in Anwendung auf die Phase nach dem ersten Kompressionsmaximum einen Widerspruch, da bei der Expansion des Plasmas die Zahl der während der voraufgegangenen Kompression in der Grenzschrift eingefangenen Teilchen entsprechend der Zunahme des Radius nicht wieder mit $N \sim a_0^2 - a^2(t)$ abnimmt. Vielmehr wird das innere Magnetfeld alle in der Grenzschrift bis zum Kompressionsmaximum eingefangenen Teilchen reflektieren und daher die in der Grenzschrift enthaltene Masse konstant bleiben, da der äußere Rand der Grenzschrift sich jetzt ins Vakuum verschiebt und daher von dort keine neuen Teilchen in die Grenzschrift eintreten können, vorausgesetzt, daß im Bereich $r > a(t)$ wirklich Vakuum ist.

Anderenfalls würde die Masse auch nicht abnehmen, wie es das Modell voraussetzt, sondern zunehmen. Wenn man einen solchen Effekt beiseite läßt, folgt die Konstanz der Teilchenzahl bei der expansiven Bewegung. Wird die Bewegung wieder kompressiv, infolge des weiterhin ansteigenden Magnetfeldes, so ist wieder eine Zunahme der Masse der Grenzschrift möglich, denn die Bewegung erfolgt jetzt wieder in das Neutralgas oder das schwach ionisierte Plasma hinein, wobei die Dichte gegenüber der Dichte in der ersten Phase kleiner geworden ist, da das im Innern vorhandene Gas sich verdünnt hat.

Andererseits ist damit zu rechnen, daß die bei hohen Kompressionsgraden und daher hohen Feldstärken des inneren Magnetfeldes auftretenden hohen elektrischen Feldstärken zum Durchschlag des Neutralgases und zur weiteren Aufheizung des Plasmas führen können, wodurch auch im Innengebiet ein hochleitendes Plasma vorliegen kann, in dem die elektromagnetischen Kräfte zur Entstehung von Plasmabewegungen führen. Die Vor-

stellung einer kleinen Grenzschrift, vor deren inneren Radius die Gasgeschwindigkeit Null ist, trifft dann nicht mehr zu.

Es wurde in (1.13) vorausgesetzt, daß die Dauer des zu betrachtenden Vorgangs klein sei gegenüber der Schwingungsdauer des Entladekreises. Nur so ließ sich ein einfacher expliziter Ausdruck für das äußere Magnetfeld angeben und daher das Problem auf die Lösung nur einer Differentialgleichung zurückführen. Will man hingegen längere Zeiträume betrachten, so muß man die Veränderlichkeit der Spannung der Kondensatorbatterie berücksichtigen, also auf die vollständige Kreisgleichung (1.8) zurückgreifen.

Der genannten Gründe wegen wurden die bereits im Schneepflug-Modell enthaltenen radialen Plasmaoszillationen an dem in gewisser Hinsicht realistischerem adiabaten Modell untersucht. Auch in dem neuen Modell wird die Voraussetzung der Flußkonstanz des inneren Magnetfeldes beibehalten, die jedoch zumindest in den späteren Phasen der Kompression keine gute Näherung mehr darstellt. Insbesondere läßt sich die durch die endliche Leitfähigkeit im Innern des Plasmas bedingte Dämpfung der radialen Oszillationen in diesem Modell nicht erfassen. Andererseits bietet sich leicht die Möglichkeit, den Einfluß seitlicher Teilchenverluste auf den Kompressionsvorgang zu untersuchen. Da jedoch der Einfluß des kinetischen Druckes bei hohen Anfangsmagnetfeldstärken gering ist, der seitliche Teilchenverlust die Wirkung des Druckes noch verringert, wurde der Einfluß des kinetischen Druckes in der numerischen Rechnung nicht systematisch untersucht.

Die Bedingung für die Gültigkeit der Gleichung (2.11) für das innere Magnetfeld bei vollkommen leitendem Plasma.

Der in 2.2 angegebene Ausdruck für die Stärke des inneren Magnetfeldes bleibt, wie schon dort betont, auch bei leitendem Gas im Innengebiet des Plasmazyinders gültig, sofern nur wieder an jeder Stelle eine so hohe Leitfähigkeit herrscht, daß die Magnetfelddiffusion vernachlässigt werden kann. Für die auf ein Elektron im mitbewegten System wirkende azimuthale elektrische Feldstärke gilt dann

$$(3.1) \quad E_{\theta}' = \frac{1}{r} \int_0^r \dot{B}_z dr + v_r B_z = 0$$

Wenn überall v_r proportional zu r ist, ist Gleichung (3.1) mit der Homogenität des Magnetfeldes B_z verträglich. Wird nämlich $\partial B_z / \partial r = 0$ vorausgesetzt, so folgt aus Gleichung (3.1) zunächst

$$\frac{\partial B_z}{\partial t} = -\frac{2}{r} v_r B_z$$

Damit wirklich B_z von r unabhängig ist, muß man für v_r den Ansatz machen

$$v_r = \dot{a}(t) \cdot \frac{r}{a} \quad ,$$

worin a zunächst einen willkürlich gewählten Radius und $\dot{a}(t)$ die an dieser Stelle vorhandene Gasgeschwindigkeit bezeichnen möge. Die Gleichung (3.1) liefert dann

$$(3.2) \quad B_z a^2 = \text{const} \quad ,$$

d.i. Konstanz des magnetischen Flusses innerhalb von Querschnittsflächen mit Radius a bei homogener Magnetfeldverteilung. Der Ausdruck (2.11) gilt demnach, wenn das Strömungsfeld $v_r(r, t)$ durch eine Ähnlichkeitslösung beschrieben wird.

Unter Ähnlichkeitslösungen versteht man bekanntlich eine Klasse von Lösungen des hydrodynamischen Gleichungssystems, die sich als Produkt einer reinen Zeitfunktion mit einer nur vom relativen Ort $x = r/a(t)$ abhängigen Funktion darstellen lassen. Für irgendeine Größe des Strömungsfeldes gilt dann $\varphi(r, t) = f(x) g(t)$.

Insbesondere gilt für die radiale Geschwindigkeit zunächst

$$(3.3) \quad v_r(r, t) = \dot{a}(t) f(x),$$

wenn noch zusätzlich gefordert wird, daß $f(1) = 1$ sein soll, da am Plasmamrand $a(t)$ die Strömungsgeschwindigkeit v_r gleich der Geschwindigkeit ist, mit der sich die Grenzfläche zwischen Vakuum und Plasma verschiebt. Wenn keine Diffusion durch die Grenzfläche erfolgt, läßt sich anhand der Kontinuitätsgleichung leicht zeigen, daß $f(x) = x$ eine Ähnlichkeitslösung ist. Es gilt nämlich für die Dichte $\rho(r, t) = \zeta(t) g(x)$. Integriert man über dem Querschnitt des Plasmazylinders, so erhält man mit mN als Masse je Längeneinheit des Plasmazylinders

$$\zeta(t) = \frac{mN}{2\pi a^2 \int_0^1 g(x) \cdot x dx}$$

Da die Masse wegen der vorausgesetzten Konstanz der Teilchenzahl konstant und das Integral im Nenner von $\zeta(t)$ ebenfalls zeitunabhängig ist, folgt

$$(3.4) \quad \frac{\dot{\zeta}}{\zeta} = -2 \frac{\dot{a}}{a}$$

Die Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \rho v) = 0$$

ergibt nach Einsetzen für ζ , v_r und $r = xa$

$$\frac{d}{dx} (x g f - x^2 g) = 0$$

Die Lösung ist $f = x$ mit einer gleich Null gesetzten Integrationskonstanten. Die Benutzung von Ähnlichkeitslösungen für das Strömungsfeld eines Plasmazylinders geht ursprünglich auf Leontovich und Osovets²⁴ zurück, welche damit Gleichungen für das dynamische Verhalten eines Plasmas im instationären z-Pinch-Effekt ableiteten. In²⁴ wurde der Strom im Plasma als zeitlich linear ansteigend angenommen, wie es der Voraussetzung

einer großen Kapazität der Entladebatterie und einer im Vergleich zur Induktivität des Entladungsrohres großen äußeren Induktivität entspricht. In einer weiteren Arbeit von Osovets²⁵ wurde die letztgenannte Voraussetzung fallen gelassen und die Veränderlichkeit der Gesamtinduktivität berücksichtigt, die erste Voraussetzung hingegen beibehalten. Wegen der Vernachlässigung der Abnahme der Spannung an der Kondensatorbatterie handelt es sich hierbei nur um eine für die erste Phase des Kompressionsvorganges relevante Beschreibung. Für diese Phase ist andererseits die Voraussetzung von Ähnlichkeitslösungen und adiabaten Druckänderungen weniger zutreffend, weil die dem Schneepflug-Modell zugrunde liegende Annahme eines in der Ausdehnung begrenzten Geschwindigkeitsfeldes im Anfang der Bewegung der Wirklichkeit näher kommen dürfte. Wir bezeichnen das Modell, das der im folgenden für den Radius des Plasmazylinders benutzten Gleichung zugrunde liegt, als Osovets-Modell und meinen damit im wesentlichen die Annahme von Ähnlichkeitslösungen und eines adiabaten Druckgesetzes. Bei der Anwendung des Modells auf die Verhältnisse bei der magnetischen Kompression sind im allgemeinen sowohl inneres Magnetfeld als auch seitliche Teilchenverluste zu berücksichtigen.

Die Bewegungsgleichung im Osovets-Modell.

Die magneto-hydrodynamische Bewegungsgleichung für ein zylindersymmetrisches Plasma war

$$(3.5) \quad \int_0^a \left(\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} \right) = - \frac{\partial}{\partial r} (p + p_m) ,$$

wobei zum Unterschied von früher der skalare hydrodynamische Druck p neben dem magnetischen Druck p_m berücksichtigt ist, um den Fall hoher Anfangsgasdichten des zu komprimierenden Plasmas mit großer Endtemperatur miterfassen zu können. Dadurch enthält (3.5) auch eine allgemeinere Gleichgewichtsbedingung. Einsetzen für v_r und Integration über dem Radius r liefert

$$(3.6) \quad m N \ddot{a} = - 2 \pi a \left[\frac{B_a^2}{2 \mu_0} - \left(p_0 + \frac{B_i^2}{2 \mu_0} \right) \right] ,$$

worin

$$mN = 2\pi \int_0^a \rho r dr$$

die Massen-Liniendichte der radial bewegten Teilchen ist; p_0 bezeichnet den Druck in der Achse.

Die Voraussetzung der Flußkonstanz im Plasmazylinder bedeutet

$$(3.7) \quad B_i = B_i^* \left(\frac{a^*}{a} \right)^2$$

Für den kinetischen Druck wird ein adiabates Gesetz in der Form

$$(3.8) \quad p = p^* \left(\frac{a^*}{a} \right)^{2\gamma}$$

angesetzt. Hierin bedeuten die mit Stern bezeichneten Größen den Wert im Gleichgewichtszustand, für den gilt

$$(3.9) \quad \frac{B_a^{*2}}{2\mu_0} = \frac{B_i^{*2}}{2\mu_0} + p^* = \frac{B_i^{*2}}{2\mu_0} (1 + \tilde{\beta}^*)$$

worin $\tilde{\beta}^*$ den $\tilde{\beta}$ -Wert des Plasmas ebenfalls im Gleichgewichtszustand bezeichnet. Vernachlässigt man den kinetischen Druck, so erscheint die Bewegungsgleichung in der Form

$$(3.10) \quad mN\ddot{a} = -2\pi a \left[\frac{B_a^2}{2\mu_0} - \frac{B_i^{*2}}{2\mu_0} \left(\frac{a^*}{a} \right)^4 \right]$$

Dieselbe Form ergibt sich, wenn man in der Gleichung für das Schneepflug-Modell die Masse in der Grenzsicht als konstant ansetzt, was dort jedoch nur für die expansive Phase zulässig ist.

Führt man noch ein

$$(3.11) \quad x = \frac{a(t)}{a^*}, \quad b = \frac{B_a}{B_a^*},$$

so wird, weil $B_a^* = B_i^*$ für den Anfang der Bewegung

$$(3.12) \quad \ddot{x} = - \frac{\pi B_a^{*2}}{\mu_0 m N} x (b^2 - x^4)$$

Über eine Integration dieser Gleichung in einem Sonderfall wird weiter unten zu sprechen sein. Vernachlässigt man andererseits in (3.6) die Beschleunigung, was nur für langsame quasi-stationäre Bewegungen zulässig ist, so liefert die Gleichung (3.6) des Druckgleichgewichtes einen expliziten Ausdruck für den Radius in Abhängigkeit von den übrigen Größen. Hiervon macht Kolb¹ Gebrauch, wobei zusätzlich noch der Druck des inneren Magnetfeldes gegenüber dem kinetischen Druck vernachlässigt wird.

Gleichung (3.8) gilt übrigens auch für den Mittelwert des Druckes über dem Querschnitt, wie sich wieder bei Annahme von Ähnlichkeitslösungen aus der Energiegleichung eines dissipationsfreien Plasmas

$$(3.13) \quad \frac{\partial}{\partial t} (p/\rho\gamma) + v_r \frac{\partial}{\partial r} (p/\rho\gamma) = 0$$

ableiten läßt. Man kann zwar die Dichte als unabhängig vom Ort annehmen, aber nicht dasselbe vom Druck fordern, da die Bewegungsgleichung innerhalb des Plasmas bei vorausgesetzter Homogenität des Magnetfeldes eine Ortsabhängigkeit des Druckes ergibt.

Da für eine Ähnlichkeitslösung von $p(r, t)$ wieder gilt $p(r, t) = \pi(t) \cdot h(x)$, so kommt mit den Ausdrücken

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \dot{\pi} h - x \pi h' \frac{\dot{a}}{a}, \quad \frac{\partial p}{\partial r} = \frac{\pi h'}{a}$$

und den entsprechenden für ρ durch Einsetzen in die Adiabaten-Gleichung (3.13)

$$(3.14) \quad \frac{\dot{\pi}}{\pi} = - 2\gamma \frac{\dot{a}}{a}$$

Der mittlere Druck ist definiert durch

$$\pi a^2 \bar{p} = \int_0^a 2\pi r p(r) dr$$

oder

$$\bar{p} = 2\pi(t) \int_0^1 x h(x) dx$$

Weil die Zeitabhängigkeit von \bar{p} aufgrund der Annahme einer Ähnlichkeitslösung nur in $\pi(t)$ steckt, gilt für \bar{p} dasselbe Änderungsgesetz wie für $\pi(t)$, also

$$\dot{\bar{p}}/\bar{p} = -2\gamma \dot{a}/a$$

oder

$$(3.15) \quad \frac{d}{dt} (\bar{p} a^{2\gamma}) = 0$$

Das adiabate Gesetz in der Form (3.8) gilt bei Ähnlichkeitslösungen daher auch für den mittleren Druck \bar{p} . Die Dichteverteilung unterliegt dagegen im Modell keinen Einschränkungen. Beispielsweise ist die Annahme homogener Dichte vereinbar mit der Homogenität des Magnetfeldes. Für ein vollkommen leitendes Plasma würde sogar die bekannte hydromagnetische Aussage bestehen, daß die Dichte notwendig überall proportional zum Magnetfeld mit einem ortsunabhängigen Faktor ist. Jedoch braucht ein solcher Zusammenhang nicht zu bestehen, wenn ein Plasma erst innerhalb eines Magnetfeldes aus Neutralgas entsteht.

Berücksichtigung seitlicher Teilchenverluste.

Bei kleinen Magnetfeldstärken und hohen Drucken kann auch der seitliche Teilchenverlust in den späteren Phasen den Ablauf der Kompression stark beeinflussen. Die detaillierte Erfassung des Verlustes von Teilchen setzt natürlich die Berücksichtigung der Abhängigkeit aller den Plasmazustand kennzeichnenden Größen von der in Achsenrichtung gemessenen z-Koordinate voraus. Dies gilt insbesondere für Systeme mit Spiegelgeometrie. Wegen der damit verbundenen Schwierigkeit sei hier nur angenommen, daß der Ausströmvorgang summarisch durch die Annahme einer mittleren Teilchendiffusionszeit τ_D und durch ein exponentielles Ausströmgesetz

in der Form

$$(3.16) \quad \frac{\partial N}{\partial t} = - \frac{1}{\tau_D} N$$

für die Liniendichte N der Teilchen beschrieben werden kann.

Die Änderungen, die am Druckgesetz anzubringen sind, lassen sich dann unmittelbar angeben. Um zuvor jedoch die Voraussetzungen kennenzulernen, die in dem Ausströmgesetz stecken, gehen wir von der Kontinuitätsgleichung aus

$$(3.17) \quad \frac{\partial n}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r n v_r) + \frac{\partial}{\partial z} (n v_z) = 0$$

Sind darin alle Größen außer v_z selbst unabhängig von z , so liefert die Integration über z mit $l = \text{Spulenlänge}$

$$l \left[\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r n v_r) \right] = - n v_z \Big|_0^l$$

mit $n_0 = n_l = n$, $v_{z0} = -v_{zl} = \bar{v}_z$ und $\tau = l/2\bar{v}_z$

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r n v_r) = - \frac{n}{\tau}$$

Integration über den Querschnitt gibt jetzt

$$2\pi \int_0^a r \frac{\partial n}{\partial t} dr + 2\pi \int_0^a \frac{\partial}{\partial r} (r n v_r) dr = - \frac{N}{\tau}$$

wegen

$$\int_0^a r \frac{\partial n}{\partial t} dr = \frac{\partial}{\partial t} \int_0^a n r dr - a n a$$

daher

$$\frac{\partial N}{\partial t} = - \frac{N}{\tau}$$

also Gleichung (3.16) mit $\tau_D = l/2\bar{v}_z$.

Die Unabhängigkeit der Lösung von der z-Koordinate entspricht der freien Molekularströmung. Im allgemeinen ist τ_D von der Dichte abhängig. Es wird also τ_D sicher von der Zeit abhängen. Zur Erfassung des generellen Einflusses von Teilchenverlusten bei hohen Anfangsdichten des Plasmas soll τ_D auch als zeitlich konstant angenommen werden. Es ist dann

$$(3.18) \quad N = N^* \exp\left(-\frac{t}{\tau_D}\right)$$

oder mit Rückgang auf die Bedeutung von N

$$(3.19) \quad \frac{n}{n^*} = \left(\frac{a^*}{a}\right)^2 \exp\left(-\frac{t}{\tau_D}\right)$$

Bei Annahme adiabater Verdichtung des Plasmas wird daher bei Teilchenverlusten statt (3.8)

$$(3.20) \quad p = p^* \left(\frac{a^*}{a}\right)^{2\gamma} \exp\left(-\gamma \frac{t}{\tau_D}\right)$$

3.2 Die Lösung der Bewegungsgleichung.

Die Integration der Gleichung (3.12) in einem Sonderfall: radiale hydro-magnetische Oszillationen nach Green - Niblett²⁶.

Wenn man in Gleichung (3.12) $b = 1$ setzt, also das äußere Magnetfeld für die Dauer des zu betrachtenden Vorganges als konstant annimmt, und die Kopplung des Magnetfeldes mit der Bewegung beiseite läßt, gestattet die Gleichung (3.12) die Berechnung einer exakten Lösung. Mit der Abkürzung

$$(3.21) \quad \nu_A = \frac{B_a^*}{(\pi \mu_0 m N)^{1/2}}$$

und einer Integrationskonstanten C in unserer Schreibweise lautet diese

$$(3.22) \quad \chi^2 = 1 + C \sin 2\pi \nu_A t$$

Diese Lösung wurde von Green-Niblett²⁶ gefunden. Sie beschreibt eine nichtlineare Schwingung mit einer konstanten, d.i. nicht von der Amplitude abhängigen Frequenz ν_A , bei der nicht die Amplitude, sondern deren Quadrat eine harmonische Schwingung ausführt.

Schwingungen treten auf, wenn entweder $x(0) \neq 1$; $\dot{x}(0)$ beliebig oder $x(0) = 1$; $\dot{x}(0) \neq 0$ ist. Der Fall $C = 0$ entspricht der statischen Lösung $x = 1$, dem Verweilen des Plasmas in der Gleichgewichtslage $a = a^*$.

In (3.22) ist die eine Anfangsbedingung $x(0) = 1$ bereits vorausgesetzt. Die Anfangsbedingungen selbst sind natürlich der Gleichung nicht zu entnehmen: Die Amplitude der Schwingung bleibt unbestimmt.

Das Green-Niblettsche Ergebnis gilt auch dann noch, wenn $b(t)$ langsam veränderlich ist, so daß viele Oszillationen bei nahezu konstantem b erfolgen. Dies trifft für das Strommaximum zu, in dem dann das äußere Magnetfeld nahezu stationär ist. Die jeweilige Frequenz wird dann durch den jetzt über B ebenfalls zeitabhängigen Ausdruck (3.21) gegeben. Ferner gilt die Lösung noch, wenn der kinetische Druck nicht vernachlässigt wird, aber die Kompression zweidimensional erfolgt. Dazu ist erforderlich, daß die Oszillationsfrequenz groß genug ist, um Übergänge von Energie auf den dritten Freiheitsgrad in z -Richtung auszuschließen, wenn daher die Ionenstoßzeiten groß gegenüber der Schwingungsdauer der Oszillationen sind. Andererseits bedeutet die Voraussetzung eines konstanten äußeren Magnetfeldes für Experimente mit $\lambda \gtrsim 1$ eine Begrenzung der Lösung auf Schwingungsformen mit vernachlässigbarer Amplitude. Denn nur unter dieser Voraussetzung ist die Veränderlichkeit der Induktivität und damit des Magnetfeldes während der Schwingungen zu vernachlässigen.

Die Berechnung der Kompression als Einschaltvorgang mit Berücksichtigung der endlichen Kapazität der Batterie.

Faßt man die entsprechenden in 3.1 beschriebenen Ausdrücke zusammen, so erhält man mit den Abkürzungen

$$(3.23) \quad \beta = \frac{B_0}{B_1}, \quad b = \frac{Ba}{B_1}, \quad \gamma = \frac{a}{a_0}, \quad \tilde{\beta}_0 = 2\mu_0 p_0 / B_0^2$$

für die Bewegungsgleichung im Osovets-Modell des magnetischen Kompressionsvorganges

$$(3.24) \quad \frac{d^2 \gamma}{d\tau^2} = - \frac{\pi B_1^2 t_c^2}{\mu_0 m N} \gamma \left[b^2 - \frac{\beta^2}{\gamma^4} (1 + \tilde{\beta}_0 \gamma^{2(2-\gamma)}) \right]$$

Die Gleichung für das äußere Magnetfeld wird jetzt, ebenfalls in dimensionsloser Schreibweise

$$(3.25) \quad \frac{d}{d\tau} [1 + \lambda(1 - \gamma^2)] b = \frac{\mu_0 V_0}{2 l_a B_1} - (\omega_0 t_c)^2 \int_0^\tau b d\tau$$

Setzen wir nun

$$\frac{B_1 t_c^2}{4 \mu_0 \rho_0 a_0^2} = 1$$

und definieren t_c wie früher, durch Gleichung (1.15), so erhält B_1 ebenfalls die gleiche Bedeutung wie früher und die Gleichungen werden wieder besonders einfach:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \gamma}{d\tau^2} &= - 4 \gamma \left[b^2 - \frac{\beta^2}{\gamma^4} (1 + \tilde{\beta}_0 \gamma^{2(2-\gamma)}) \right] \\ \frac{d}{d\tau} [1 + \lambda(1 - \gamma^2)] b &= 1 - \alpha \int_0^\tau b d\tau \end{aligned}$$

Darin hat α die gleiche Bedeutung wie in 1.2; es ist

$$\alpha^{1/2} = 2\pi \frac{t_c}{T} = \frac{\pi}{2} \delta$$

mit $\delta = t_c / T_{1/4}$, und α daher nahezu gleich dem Verhältnis der Kompressionszeit t_c zur Dauer der Viertelperiode $T_{1/4}$ des äußeren Entladekreises bei der Induktivität L_a , d.i. bei vollständiger Leitfähigkeit und konstantem Radius a_0 des Plasmas in der Spule.

Für die numerische Rechnung hat man noch b als explizite Funktion der übrigen Größen auszurechnen. Das zu lösende Gleichungssystem wird

danach für $\gamma = 5/3$

$$(3.26a) \quad \frac{d^2 y}{d\tau^2} = -4y \left[b^2 - \frac{\beta^2}{y^4} (1 + \tilde{\beta}_0 y^{2/3}) \right]$$

$$(3.26b) \quad \frac{d^2 b}{d\tau^2} = \frac{4\lambda \frac{dy}{d\tau} \frac{db}{d\tau} + 2\lambda b \left(\frac{dy}{d\tau} \right)^2 + 2\lambda b y \frac{d^2 y}{d\tau^2} - \alpha b}{1 + \lambda(1 - y^2)}$$

mit den Anfangsbedingungen

$$(3.27a) \quad y(0) = 1 \quad (3.27d) \quad b(0) = \beta (1 + \tilde{\beta}_0)^{1/2}$$

$$(3.27b) \quad y'(0) = 0 \quad (3.27e) \quad b'(0) = 1$$

$$(3.27c) \quad y''(0) = 0 \quad (3.27f) \quad b''(0) = -\alpha \beta (1 + \tilde{\beta}_0)^{1/2}$$

Dabei folgt (3.27d) aus der Forderung der Druckgleichheit zu Beginn der Kompression und bedeutet, daß die Bewegung aus dem Druckgleichgewicht heraus erfolgt mit einer Anfangsgeschwindigkeit $y' = 0$, was der Annahme $y(0) = 1$ entspricht, und (3.27e) folgt aus (3.26b) ebenfalls mit den Anfangswerten von y und y' . Die Anfangswerte für y'' und b'' sind hier zu den Anfangsbedingungen mitgezählt, da sie in dem benutzten Rechenverfahren gleichwertig zu den eigentlichen Anfangsbedingungen hinzutreten. Die Tatsache, daß $y''(0) = 0$, erlaubt beim Osovets-Modell die unmittelbare Anwendbarkeit des Taylor-Verfahrens.

Wenn anstatt (3.26a) die zweidimensionale Kompression mit $\gamma = 2$ berechnet werden soll, fällt die y -Abhängigkeit im $\tilde{\beta}$ -Wert des Plasmas fort und die Gleichung wird

$$(3.28) \quad \frac{d^2 y}{d\tau^2} = -4y \left[b^2 - \frac{\beta^2}{y^4} (1 + \tilde{\beta}_0) \right]$$

Die Gleichung (3.28) unterscheidet sich formal nicht von der für den Fall ohne kinetischen Druck geltenden, weil gilt

$$(3.28a) \quad \frac{d^2 y}{d\tau^2} = -4y \left(b^2 - \frac{\hat{\beta}^2}{y^4} \right)$$

mit $\hat{\beta} = \beta (1 + \beta)^{1/2}$ anstelle von β , so daß also beide Fälle durch dieselbe Rechnung erfaßt werden. Der Grund liegt natürlich darin, daß für $\gamma = 2$ der kinetische Druck im selben Maße wie der magnetische Druck umgekehrt mit der vierten Potenz des Radius zunimmt.

Da in (3.26) die Ableitungen der rechts stehenden Ausdrücke begrenzt sind, ist eine Reihenentwicklung der Lösungen für y und b nach Potenzen von τ auch analytisch möglich. Die Berechnung der Ableitungen im Entwicklungspunkt $\tau = 0$, $y = 1$ ist aber zumal bei den Ableitungen höherer Ordnung langwierig und mühsam. Zudem bestehen Anzeichen dafür, daß die Reihen gerade in interessierenden Fällen, wie beispielsweise für große $\lambda \gtrsim 1$, schlecht konvergieren, und daß die ersten Glieder der Reihenentwicklung daher keine zuverlässige Berechnung beispielsweise des ersten Kompressionsmaximums zulassen. Die verwickelten Abhängigkeiten der Koeffizienten von den verschiedenen Parametern erschweren überdies die Diskussion. Das Gleichungssystem (3.26) wurde daher ebenfalls numerisch integriert, wodurch sich ohne Schwierigkeiten auch die Dämpfung des Stromes durch den elektrischen Widerstand R des Batteriekreises berücksichtigen ließ. Mit der Zeitkonstanten $\tau_R = 2 L_a / R$ für die Dämpfung ist dazu rechts in Gleichung (3.26b) ein Term

$$(3.29) \quad \left(\frac{d^2 b}{d\tau^2} \right)_R = - \frac{T}{2\tau_R} \frac{\delta}{1 + \lambda(1 - \gamma^2)} \frac{db}{d\tau}$$

hinzuzufügen, der als proportional zu R die Dissipation der elektrischen Energie des Kreises enthält.

Beschreibung der Lösungskurven.

In den Abbildungen 9 und 10 sind die Ergebnisse für den Fall $\lambda = 5$, $\beta = 0,1$ und $\beta = 0,01$ zusammengestellt. Die Dauer der Viertelperiode beträgt in beiden Beispielen $T_{1/4} = 2,5 t_c$; der kinetische Druck des Plasmas wurde vernachlässigt. Qualitativ ergibt sich zunächst das gleiche Bild wie im Schneepflug-Modell: Kompression mit einer Zeitkonstanten, die bis auf einen λ -abhängigen Faktor durch die Kompressionszeit t_c gegeben ist. Die Veränderlichkeit der Batteriespannung führt aber jetzt dazu, daß auch im Mittel die Kompression nicht unbegrenzt zunimmt, sondern das Plasma im Augenblick des Nulldurchgangs des Stromes an die Wand gelangt. Trotz der Schwingungen des äußeren Magnetfeldes sind die mittleren radialen Oszillationen des Plasmazylinders selbst relativ gleichförmig, so daß für diesen Teil Gleichung (3.22) bei geeigneter Wahl der in Gleichung (3.22) noch unbestimmten Gleichgewichtslage einen Näherungsausdruck für den Radius darstellen könnte. Doch sind die Periodenlängen, wie schon betont, nicht durch das momentane äußere Magnetfeld, sondern durch den Einschaltvorgang, d.i. durch die Zeitkonstante t_c gegeben. Durch diesen sind auch die bei²⁶ unbestimmt gebliebenen Amplituden bestimmt.

Abbildung 11 gibt die Verhältnisse bei $T_{1/4} = 10 t_c$ wieder. Das Strommaximum würde bei konstanter Induktivität des Kreises mit dem Zeitpunkt $t = 10 t_c$ zusammenfallen. Infolge der Zunahme der Spuleninduktivität bei der Kompression des Plasmas ist die tatsächliche Dauer der Batterieschwingung größer, so daß der Stromanstieg noch über $10 t_c$ hinaus erfolgt. Infolgedessen entspricht der gezeichnete Verlauf einem im Mittel linear zunehmenden äußeren Magnetfeld. Die Zahl der Schwingungen je Viertelperiode ist im Vergleich zum Fall $T_{1/4} = 2,5 t_c$ erhöht, die Periodenlänge der Oszillationen ist aber wieder durch t_c bestimmt. Infolge der hohen Kompressionsgrade hat das innere Magnetfeld qualitativ den gleichen Verlauf wie in Abbildung 10. Das äußere Magnetfeld hat dagegen im Mittel einen glatteren Verlauf als für $\delta = 0,4$. Man entnimmt den Kurven noch, daß b^i auch negativ wird.

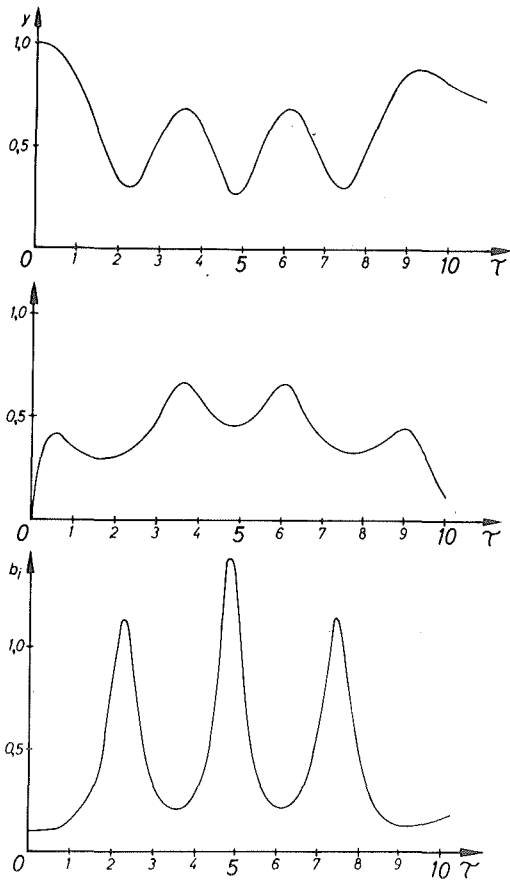


Abb. 9

Plasmaradius, äußeres und inneres Magnetfeld nach dem Osovets-Modell für ein inneres Magnetfeld mit $\beta = 0,1$ und einem Induktivitätsverhältnis $\lambda = 5$. Dauer der Viertelschwingung $T_{1/4} = 2,5 t_c$.

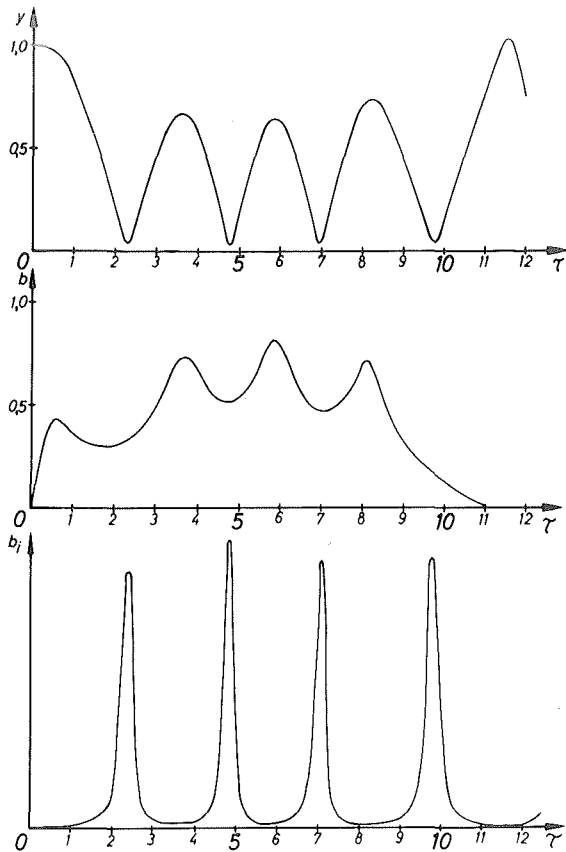


Abb. 10

Plasmaradius, äußeres und inneres Magnetfeld nach dem Osovets-Modell für ein inneres Magnetfeld mit $\beta = 0,01$ und einem Induktivitätsverhältnis $\lambda = 5$. Dauer der Viertelschwingung $T_{1/4} = 2,5 t_c$.

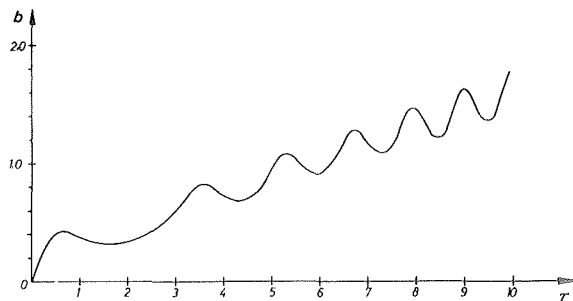
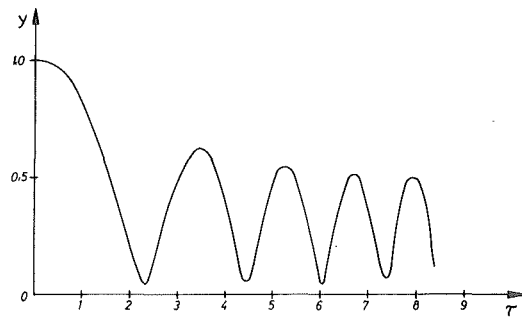


Abb. 11

Plasmaradius und äußeres Magnetfeld nach dem Osovets-Modell für ein inneres Magnetfeld mit $\beta = 0,01$, $\lambda = 5$. Dauer der Viertelperiode $T_{1/4} = 10 t_c$.

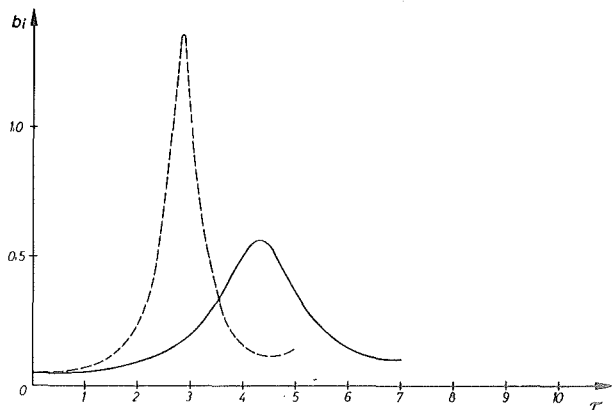
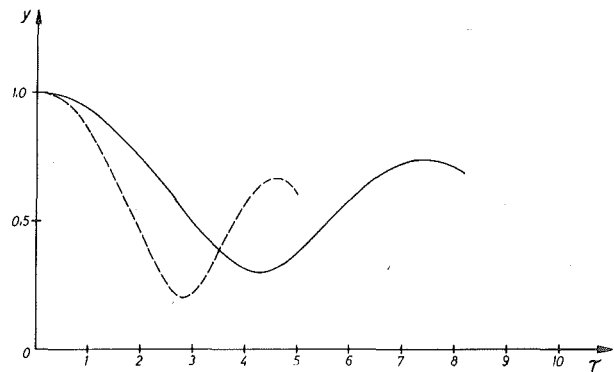


Abb. 12

Der Einfluß eines elektrischen Widerstandes auf den Verlauf von Plasmaradius und innerem Magnetfeld bei den Parameterwerten $\lambda = 10$, $\beta = 0,05$. Gestrichelte Linien: Verlauf ohne Dämpfung.

Abbildung 12 zeigt als Beispiel für den Einfluß des elektrischen Widerstandes den Verlauf der Lösungskurve für den Fall einer relativ großen Dämpfung mit $\tau_R = 0,5 T$ bei $\lambda = 10$, $\beta = 0,05$. Die gestrichelte Linie bezeichnet den Verlauf ohne Dämpfung bei gleichen Werten der übrigen Parameter. Die Kompression erfolgt langsamer und ist schwächer als ohne Dämpfung. Die Amplitude des inneren Magnetfeldes ist merklich kleiner, der Kurvenverlauf flacher, und das Maximum liegt zeitlich später. Man entnimmt diesen Kurven, daß der elektrische Widerstand trotz geringer Änderung der Eigenfrequenz des Kreises einen merklichen Einfluß auf den zeitlichen Ablauf haben kann.

Literatur

- 1) A.C. Kolb,
Magnetic compression of shock preheated deuterium.
Proceedings of the Second United Nations International Conference
on the Peaceful Uses of Atomic Energy, Geneva 1958,
Vol. 31. Seite 328 - 340
- 2) W.C. Elmore, E.M. Little, W.E. Quinn,
Neutrons from Plasma compressed by an axial magnetic field (Scylla) .
Proc. of the Second United Nations International Conference on the
Peaceful Uses of Atomic Energy, Geneva 1958,
Vol. 32, Seite 337 - 342
- 3) F.B. Ribe,
Recent experimental results on fast-compression plasma heating and
rotating plasmas.
Proc. of the Fourth International Conference on Ionization Phenomena
in Gases, Uppsala 1959,
Vol. 2, Seite 1032-1036
- 4) A.C. Kolb, H.R. Griem, W.R. Faust,
Dense plasmas confined by external fields.
Proc. of the Fourth International Conference on Ionization Phenomena
in Gases, Uppsala 1959,
Vol. 2, Seite 1037 - 1041
- 5) H. Fay, E. Hintz, H.L. Jordan,
Experiments on shock-compression of plasmas.
Proc. of the Fourth International Conference on Ionization Phenomena
in Gases, Uppsala 1959,
Vol. 2, Seite 1046 - 1049
- 6) H.A. Bodin, T.S. Green, G.B.F. Niblett, N.J. Peacock,
An experimental investigation of the rapid compression of a plasma
using azimuthal currents.
Proc. of the Fourth International Conference on Ionization Phenomena
in Gases, Uppsala 1959,
Vol. 2, Seite 1061 - 1064

The formation and implosions of a cylindrical current sheath in the
thetatron.
Seite 1065 - 1072

- 7) I.P. Kvartzhava, K.N. Kervalidze, J.S. Gvaladze,
Some magnetohydrodynamic effects by the impulse plasma confinement.
Proc. of the Fourth International Conference on Ionization Phenomena
in Gases, Uppsala 1959,
Vol. 2, Seite 876 - 883
- 8) H.L. Jordan, H. Kever, K. Schindler,
Notes on fast magnetic compression of plasmas.
Nuclear Instruments and Methods,
Vol. 4 (1959) Seite 322 - 326
- 9) A.C. Kolb,
Recent progress in shock wave research.
Proc. of the Fourth International Conference on Ionization Phenomena
in Gases, Uppsala 1959,
Vol. 2, Seite 1021 - 1031
- 10) A.C. Kolb, C.B. Dobbie, H.R. Griem,
Field mixing and associated neutron production in a plasma.
Physical Review Letters, Vol. 3 (1959) Seite 5
- 11) E. Hintz, H. Fay, H.L. Jordan,
Effect of radiofrequency preionisation on neutron production by a fast
magnetic compression.
Bulletin of the American Physical Society, Ser. II, Vol. 5 (1960) 328
- 12) K. Boyer, W.C. Elmore, E.M. Little, W.E. Quinn, J.L. Tuck,
Studies of plasma heated in a fast -rising axial magnetic field.
Physical Review, Vol. 119 (1960) Seite 831
- 13) M. Rosenbluth,
Dynamics of a pinched gas, Sect. 1 in "Magnetohydrodynamics"
Herausgeber: R.K.M. Landshoff, Stanford University Press,
Stanford, 1957
- 14) L. Spitzer,
Physics of fully ionized gases.
Interscience Publishers, New York, 1956
- 15) O. Bunemann,
Instability, turbulence and conductivity in current carrying plasma.
Physical Review Letters, Vol. 1 (1958) Seite 8

- 16) R.F. Post,
High-temperature plasma research and controlled fusion.
Seite 372 in E. Segré, L.I. Schiff Edits.
"Annual Review of Nuclear Sciences", Vol. 9, 1959
- 17) M. Rosenbluth, R. Garwin,
Infinite conductivity theory of pinch
Los Alamos Report LA-1850 (1954)
- 18) A.I. Morozow,
The acceleration of a plasma by a magnetic field.
Sov. Physics JETP Vol. 5 (1957) Seite 215 - 220
- 19) M.U. Clauser, L.O. Heflinger,
Equations for fast pinch.
Aeronautical Research Laboratory Report ARL-57-1010,
Ramo Wooldridge Corp., Los Angeles (1957)
- 20) C.F. Wandel,
A phenomenological theory for magnetically driven shocks.
Unveröffentlichter Seminarvortrag,
International Summer Course in Plasma Physics, Risö, 1960
- 21) N.J. Philips,
The current sheet in a gas discharge.
Proc. Physical Society, Vol. 74 (1959) Seite 700-704
- 22) S.I. Braginskij, A.B. Migdal,
Processes in a plasma column associated with rapid current rise.
Seite 28 in "Plasma physics and the problem of controlled thermo-
nuclear reactions", Bd. II, Pergamon Press, 1959
- 23) R.A. Fitch, Kolloquiumsvortrag, unveröffentlicht.
- 24) M.A. Leontovich, S.M. Osovets,
On the mechanism of current constrictions in high-current gas
discharges. J. Nuclear Energy, Vol. 4 (1957) Seite 209-212
- 25) S.M. Osovets,
The theory of rapid processes.
Seite 193 in "Plasma Physics and the problem of controlled thermo-
nuclear reactions", Bd. III, Pergamon Press, 1959
- 26) G.F.B. Niblett, T.S. Green,
Radial hydromagnetic oscillations.
Proc. Phys. Society, Vol. 74 (1959) Seite 737-745

Vorliegender Bericht ist ein Abdruck meiner im November 1960 an der Technischen Hochschule Aachen eingereichten Dissertation.

Herrn Professor Dr. W. Fucks danke ich für sein förderndes Interesse und für die Bereitstellung von Mitteln zur Durchführung der numerischen Rechnungen.

Herrn Dr. H. L. Jordan gilt mein besonderer Dank für die Anregung zu dieser Arbeit und für Diskussionen.

Dank gebührt Fräulein Dipl.-Ing. G a n o w s k i für Hilfe bei der Auswertung numerischer Ergebnisse, sowie den an den Rechnungen auf der Siemens 2002 beteiligten Mitarbeitern des Rechenzentrums der Technischen Hochschule Aachen, insbesondere Herrn B u s k i e s .
Herrn Dr. Haupt danke ich für stete Hilfsbereitschaft und sein Entgegenkommen in der Bereitstellung von Maschinenzeit.

